

RADIÁLISAN POLARIZÁLT ÜREGES PIEZOELEKTROMOS KÖRTÁRCSÁK STATIKAI VIZSGÁLATA

STATIC ANALYSIS OF RADially POLARIZED PIEZOELECTRIC HOLLOW CIRCULAR DISC

*Ecsedi István, Professor Emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet;
Baksa Attila, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet*

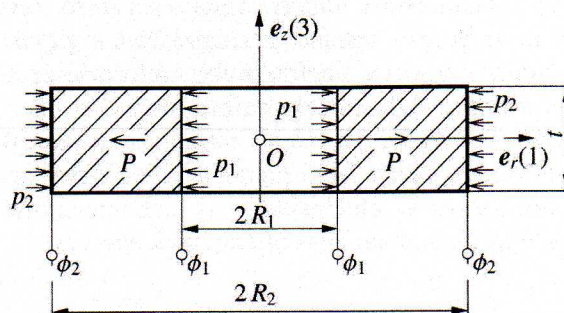
ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT). The static linear response of a hollow circular disc of a piezoelectric ceramic poled in radial direction is considered. The applied mechanical loads are uniform pressures acting on the inner and outer cylindrical boundary surfaces. The cylindrical boundary surfaces are electroded with driving voltage across in radial direction. Under the condition of plane stress state and analytical solution is presented to determine the displacements, stresses and electric potential in radially polarized hollow circular disc made of PZT4 ceramic.

1. BEVEZETÉS

A piezoelektromosság olyan elektromos jelenség, amelynek során bizonyos anyagokon, mint például nem centrálisan szimmetrikus kristályokon, bizonyos kerámiákon mechanikai terhelés hatására elektromos tér keletkezik, illetve elektromos tér hatására alakváltozás jön létre.

A piezoelektromos jelenség kezdeti alkalmazási területe a híradástechnika volt, ahol is hangszedőként, rezgőkörök vezérlésére és mikrofonokban került alkalmazásra. Napjainkban a piezoelektromos kerámiák microelektromos-mechanikai szerkezetek fontos elemei. Használják szenzorok és aktuátorok kialakítására kedvező piezoelektromos tulajdonságaik és nagy dielektromos állandójuk miatt. A piezoelektromosság alkalmazási területei elsősorban az intelligens (smart, adaptive) struktúrák, amelyekben kiemelt szerkezeti anyagként különböző piezoelektromos kerámiák nyerne felhasználat.

A piezoelektromos szerkezeti komponensek vizsgálata mechanikai és villamosságtani ismereteken alapul. E tanulmány tárgyát vékony vastagságú üreges körhenger alakú síkfeszültségi állapotban lévő piezoelektromos kerámiák statikai feladatainak megoldása alkotja. A feladat megoldása a lineáris piezoelektromosságtan egyenleteinek felhasználásával történik. A tárcsa radiális irányban polarizált, alakváltozása tengelyszimmetrikus.



1. ábra. Körgyűrű alakú piezoelektromos tárcsa

A vonatkozó forgásszimmetrikus peremérték-feladat megfogalmazására az $Or\phi z$ henger-koordinátarendszer használatával történik. A vizsgált tárcsa meridián metszetét és az alkalmazott mechanikai és villamos terheléseket az 1. ábra szemlélteti.

A tengelyszimmetrikus feladat megoldásához az alábbi egyenleteket használjuk [1,2]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\phi - E_{11}E_r, \quad (3)$$

$$\sigma_\phi = C_{12}\varepsilon_r + C_{22}\varepsilon_\phi - E_{12}E_r, \quad (4)$$

$$D_r = E_{11}\varepsilon_r + E_{12}\varepsilon_\phi + K_{11}E_r, \quad (5)$$

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad E_\phi = E_z = 0 \quad (6)$$

$$D_\phi = D_z = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dD_r}{dr} + \frac{D_r}{r} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_r(R_1) = -p_1, \quad \sigma_r(R_2) = -p_2, \quad (9)$$

$$\phi(R_1) = \phi_1, \quad \phi(R_2) = \phi_2. \quad (10)$$

A fenti egyenletekben

- u a radiális elmozdulás,
- σ_r, σ_ϕ a normálfeszültségek,

- $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$ az alakváltozások,
- E_r, E_ϕ, E_z a villamos térerősség komponensei,
- D_r, D_ϕ, D_z a villamos eltolás vektor komponensei,
- C_{11}, C_{12}, C_{22} a redukált rugalmassági állandók,
- E_{11}, E_{12} a redukált piezoelektromos állandók,
- K_{11} a redukált dielektromos állandó.

A szokásos táblázatokban szereplő értékekből az alábbi módon tudjuk meghatározni a $\sigma_z = 0$ egyenlet felhasználásával értéküket:

$$C_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad C_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}, \quad (11)$$

$$C_{22} = c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}, \quad E_{11} = e_{11} - \frac{c_{13}}{c_{33}}e_{12}, \quad (12)$$

$$E_{12} = e_{12} - \frac{c_{23}}{c_{33}}, \quad K_{11} = \kappa_{11} + \frac{e_{12}^2}{c_{33}}. \quad (13)$$

Itt a vonatkozó szakirodalom jelöléseit használtuk $c_{11}, c_{12}, \dots, e_{11}, e_{12}$ és κ_{11} -re [1,2]. Kiemelendő, hogy a polarizáció irányát az anyagegyenletekben 1 jelöli (1. ábra).

2. PEREMÉRTÉK FELADAT MEGOLDÁSA

Az (1-8) egyenletek kombinálásával az alábbi differenciál-egyenletrendszer vezethető le az $u = u(r)$ és a $\phi = \phi(r)$ függvényekre:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{u}{r^2} + \frac{E_{11}}{C_{11}} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{E_{11} - E_{12}}{C_{11}} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{E_{11} + E_{12}}{E_{11}} \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{K_{11}}{E_{11}} \frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{K_{11}}{E_{11}} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = 0. \quad (15)$$

A fenti homogén differenciál-egyenletrendszer megoldását

$$u = Ur^\lambda, \quad \phi = Vr^\lambda \quad (16)$$

alakban keresve, a λ karakterisztikus kitevőre az adódik, hogy

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{E_{12}^2 + K_{11}C_{22}}{E_{11}^2 + K_{11}C_{11}}}, \quad \lambda_{2,3} = 0. \quad (17)$$

A (16), (17) egyenletekből az következik, hogy

$$u = C_0 + C_1 r^\lambda + C_2 r^{-\lambda}, \quad (18)$$

$$\phi = -\frac{C_{22}}{E_{12}} C_0 \ln r + \frac{\lambda E_{11} + E_{12}}{K_{11}} C_1 r^\lambda + \frac{-\lambda E_{11} + E_{12}}{K_{11}} C_2 r^{-\lambda} + C_3, \quad (19)$$

$$\lambda = |\lambda_{1,2}|. \quad (20)$$

A normál feszültségek számítása az alábbi képletek felhasználásával történik:

$$\sigma_r = C_{11} \frac{du}{dr} + C_{12} \frac{u}{r} + E_{11} \frac{d\phi}{dr}, \quad (21)$$

$$\sigma_\phi = C_{12} \frac{du}{dr} + C_{22} \frac{u}{r} + E_{12} \frac{d\phi}{dr}. \quad (22)$$

A villamos eltolás vektor radiális komponense pedig az (5) egyenletből következő

$$D_r = E_{11} \frac{du}{dr} + E_{12} \frac{u}{r} - K_{11} \frac{d\phi}{dr} \quad (23)$$

képletből nyerhető.

A (9), (10) peremfeltételek alapján az ismeretlen integrációs konstansok C_0, C_1, C_2 és C_3 az alábbi lineáris egyenletrendszer alapján számíthatók:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}], \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (24)$$

$$\mathbf{x}^T = [C_1 \ C_2 \ C_0 \ C_3], \quad \mathbf{F}^T = [-p_1 \ -p_2 \ \phi_1 \ \phi_2]$$

ahol

$$a_{11} = C_{11} \lambda R_1^{\lambda-1} + C_{12} R_1^\lambda + \lambda \frac{E_{11}^2 + E_{11}E_{12}}{K_{11}} R_1^{\lambda-1}, \quad (25)$$

$$a_{12} = -C_{11} \lambda R_1^{-\lambda-1} + C_{12} R_1^{-\lambda-1} - \lambda \frac{-\lambda E_{11}^2 + E_{11}E_{12}}{K_{11}} R_1^{-\lambda-1}, \quad (26)$$

$$a_{13} = \frac{C_{12}}{R_1} - \frac{E_{11}C_{22}}{E_{12}R_1}, \quad a_{14} = 0, \quad (27)$$

$$a_{21} = C_{11} \lambda R_2^{\lambda-1} + C_{12} R_2^\lambda + \lambda \frac{E_{11}^2 + E_{11}E_{12}}{K_{11}} R_2^{\lambda-1}, \quad (28)$$

$$a_{22} = -\lambda C_{11} R_2^{-\lambda-1} + C_{12} R_2^{-\lambda-1} - \lambda \frac{-\lambda E_{11}^2 + E_{11}E_{12}}{K_{11}} R_2^{-\lambda-1}, \quad (29)$$

$$a_{23} = \frac{C_{12}}{R_2} - \frac{E_{11}C_{22}}{E_{12}R_2}, \quad a_{24} = 0, \quad (30)$$

$$a_{31} = \frac{\lambda E_{31} + E_{12}}{K_{11}} R_1^\lambda, \quad a_{32} = \frac{-\lambda E_{11} + E_{12}}{K_{11}} R_1^{-\lambda}, \quad (31)$$

$$a_{33} = -\frac{C_{22}}{E_{12}} \ln R_1, \quad a_{34} = 1, \quad (32)$$

$$a_{41} = \frac{\lambda E_{31} + E_{12}}{K_{11}} R_1^\lambda, \quad a_{42} = \frac{-\lambda E_{11} + E_{12}}{K_{11}} R_1^{-\lambda}, \quad (33)$$

$$a_{43} = -\frac{C_{22}}{E_{12}} \ln R_2, \quad a_{44} = 1. \quad (34)$$

3. NUMERIKUS PÉLDA

A numerikus példa a következő adatokkal került kiszámításra:

- Geometriai adatok:

$$R_1 = 0,02\text{m} \quad R_2 = 0,03\text{m} \quad t = 0,005\text{m}$$

- Anyagállandók:

$$c_{11} = 11,5 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad c_{12} = c_{13} = 7,4 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_{22} = c_{33} = 13,9 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad c_{23} = 7,78 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$e_{11} = 15,1 \text{ C/m}^2, \quad e_{12} = -5,2 \text{ C/m}^2,$$

$$\kappa_{11} = 0,562 \times 10^{-8} \text{ C/Vm}.$$

A fenti adatokkal számolva azt kapjuk, hogy

$$C_{11} = 7,560431655 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$C_{12} = 3,258129496 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$C_{22} = 9,544388490 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$E_{11} = 17,86834532 \text{ C/m}^2,$$

$$E_{12} = -2,431654676 \text{ C/m}^2,$$

$$K_{11} = 5,814532374 \text{ C/Vm}.$$

Előírt terhelések:

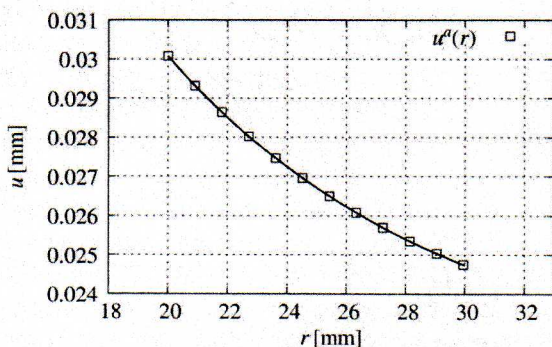
- $p_1 = 10^7 \text{ Pa}, p_2 = 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0,$
- $p_1 = p_2 = 0, \phi_1 = 150 \text{ V}, \phi_2 = 0,$
- $p_1 = 10^7 \text{ Pa}, p_2 = 0, \phi_1 = 150 \text{ V}, \phi_2 = 0.$

Az egyes terhelési előírásokhoz tartozó mechanikai és villamos mennyiségek változásait az r radiális koordináta függvényeként a 2-10. ábrák szemléltetik. σ_V von Mises feszültség számítása

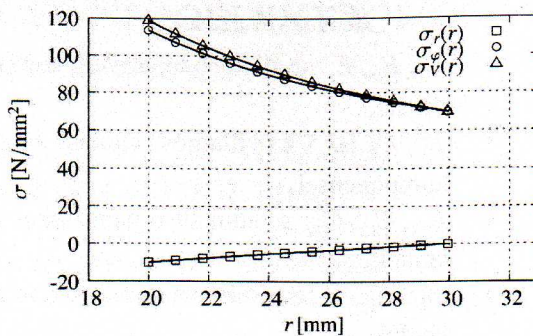
a

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\phi^2 - \sigma_r \sigma_\phi} \quad (35)$$

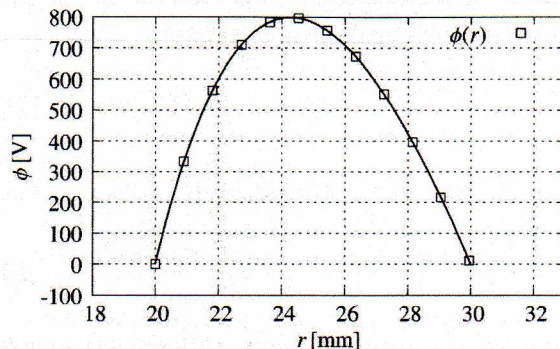
képlet felhasználásával történik.



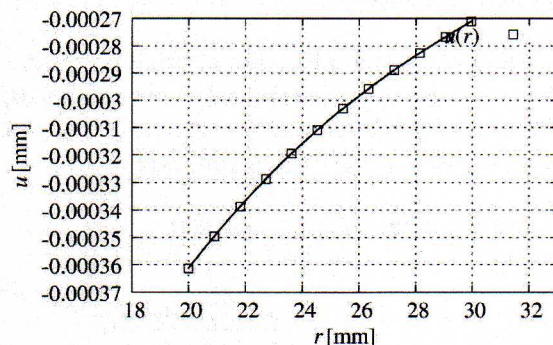
2. ábra. Az $u = u(r)$ elmozdulás-függvény görbéje az a.) terhelési esetben



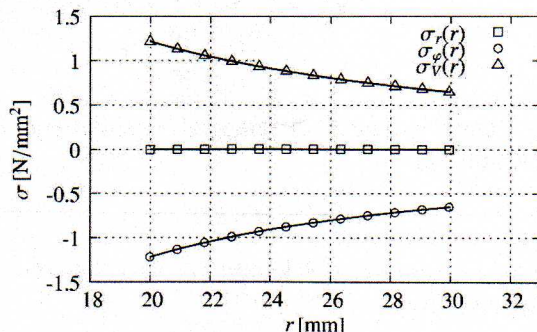
3. ábra. A σ_r, σ_ϕ és σ_V feszültség-függvények szemléltetése az a.) terhelési esetben



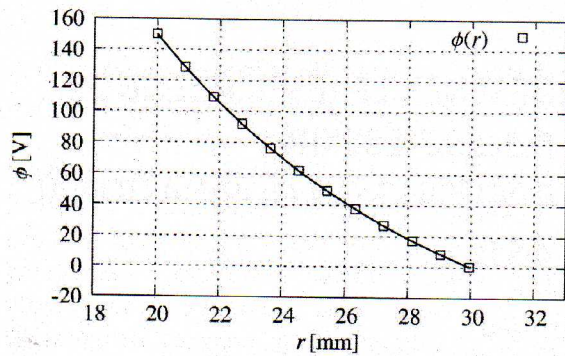
4. ábra. A $\phi = \phi(r)$ függvényképe az a.) terhelési esetben



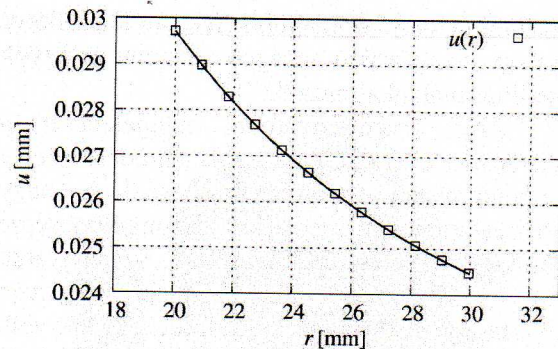
5. ábra. Az $u = u(r)$ elmozdulás-függvény görbéje a b.) terhelési esetben



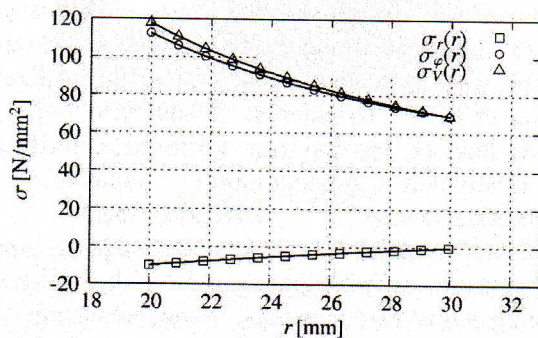
6. ábra. A σ_r, σ_ϕ és σ_V feszültség-függvények szemléltetése az b.) terhelési esetben



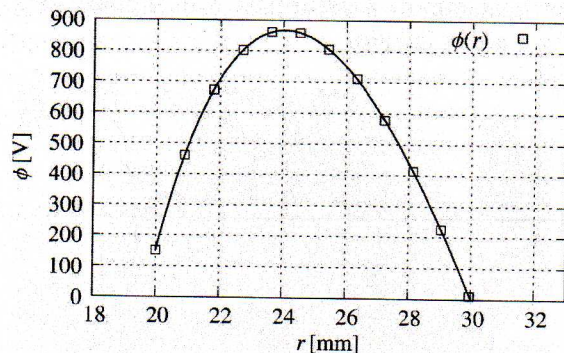
7. ábra. A $\phi = \phi(r)$ függvényképe az b.) terhelési esetben



8. ábra. Az $u = u(r)$ elmozdulás-függvény görbéje az c.) terhelési esetben



9. ábra. A σ_r , σ_ϕ és σ_v feszültség-függvények szemléltetése az c.) terhelési esetben



10. ábra. A $\phi = \phi(r)$ függvényképe az c.) terhelési esetben

4. KÖVETKEZTETÉSEK

A tanulmány üreges, vékony falvastagságú piezoelektromos körtárcsák statikai feladatának megoldására alkalmas analitikus módszer ismertet. A tárcsa radiális irányban polarizált. Az elmozdulás és a villamos potenciál függvényekre levezetett kapcsolt differenciál-egyenletrendszer analitikus megoldásával nyerhető a kitűzött mechanikai feladat megoldása. A kapott megoldás mint „benchmark solution” használható különböző numerikus eljárások pontosságának az elemzésére.

Köszönetnyilvánítás: A tanulmány elkészítését a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Hivatal (NKFIH) K115701 projektre támogatta.

5. IRODALOM

- [1] J.S. Yang, *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity*, Springer, New York, 2005.
- [2] J.S. Yang, *The Mechanics of Piezoelectric Structures*, Word Scientific, London, 2005.