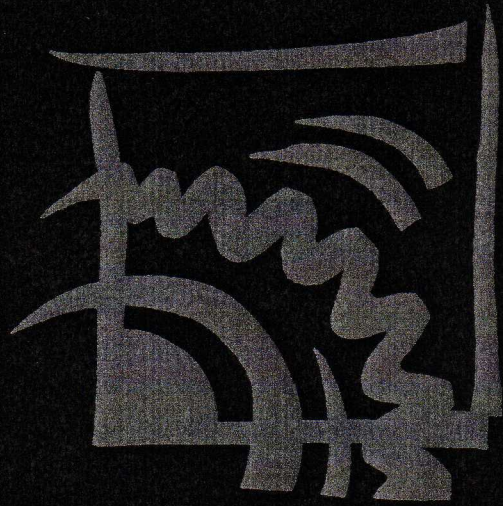


Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság
Hungarian Technical Scientific Society of Transylvania

XXVI. Nemzetközi
Gépészeti Konferencia



26th International Conference
on Mechanical Engineering

**OGGÉPÉTI
2018**

Marosvásárhely, 2018. április 26–29.
Târgu Mureș, April 26-29, 2018

A végeelem modellek megbízhatóságáról

ON THE RELIABILITY OF FINITE ELEMENT MODELS

Dr. SZABÓ Barna, professzor emeritus¹; Dr. PÁCZELT István, professzor emeritus²

¹Washington University in St. Louis, USA, tel: +1-314-435-2121, +36-30-713-9726, szabo@email.wustl.edu

²Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-269-5189, paczelt@freemail.hu

ABSTRACT

Verification of the accuracy of numerical solutions and validation of mathematical models is possible only if the mathematical models meet certain technical requirements. The formulation of these requirements is of later origin than the infrastructure of the finite element programs commonly used in engineering practice. Consequently controlling the numerical errors of the traditional finite element models is often impossible and validation is possible only within narrow limits. The methods of numerical simulation are essential for mechanical engineering calculations.

ÖSSZEFOGLALÓ

Numerikus szimulációk irányítása és ellenőrzése csak akkor lehetséges, ha a szimulációban használatos matematikai modellek kielégítenek bizonyos feltételeket. Ezen feltételek megfogalmazása későbbi eredetű, mint a mérnöki gyakorlatban általánosan használt végeelem programok infrastruktúrája. Ebből az következik, hogy a hagyományos végeelem modellek numerikus hibáinak ellenőrzése gyakran lehetetlen és a modellek érvényesítése (validation) csak szűk keretek között lehetséges. A gépészmérnöki gyakorlatban alapvetően fontos szilárdságtani számításokhoz a numerikus szimuláció módszerei szükségesek.

Kulcsszavak: végeelem modell, numerikus szimuláció, igazolás, érvényesítés

1. BEVEZETÉS

Numerikus szimulációk középpontjában általában egy variációs formába öntött matematikai probléma áll. A matematikai probléma egzakt megoldását numerikus módszerekkel, leggyakrabban a végeelem módszerrel közelítjük. A keresett mennyiségeket (quantities of interest, rövidítve QoI) a közelítő megoldásból számítjuk ki. A közelítés hibái függenek attól, hogy a matematikai problémát hogyan diszkrétizáltuk, valamint a QoI meghatározásának módjától. Amennyiben a közelítés hibái az elfogadhatónak tekinthető hibáknál nagyobbak, akkor a diszkrétizáción változtatni kell, vagy egy automatizált adaptív folyamattal vagy valami más módon.

A numerikus hibák ellenőrzése és kezelése alapvetően fontos a mérnöki gyakorlatban. Vegyük például a tervezés alapvető problémáját:

$$\mathbf{F}_{\max} \leq \mathbf{F}_{all} \quad (1)$$

vagyis egy maximális (pozitív) \mathbf{F}_{\max} értéknek a megengedett \mathbf{F}_{all} értéknél kisebbnek kell lennie. Tekintettel arra hogy numerikus szimulációban \mathbf{F}_{\max} értékének csak egy numerikus közelítése ismert, amit \mathbf{F}_{num} -al jelölünk, ismernünk kell a numerikus hiba méretét, amit τ -val jelölünk:

$$|\mathbf{F}_{\max} - \mathbf{F}_{num}| \leq \tau \mathbf{F}_{\max} \quad (2)$$

A tervezésben és annak ellenőrzésében a legkedvezőtlenebb eshetőséget kell figyelembe venni, ami az \mathbf{F}_{\max} alábecslését jelenti

$$\mathbf{F}_{min} = (1 - \tau) \mathbf{F}_{\max} \quad (3)$$

amiből következik, hogy a tervezés (1) szabályai szerint igazolni kell, hogy az

$$F_{num} \leq (1 - \tau) F_{all} \quad (4)$$

egyenlőtlenség fennáll. A fentiek két fontos megfigyelésre vezetnek: (1) a numerikus hiba nagyságának megbízható becslése nélkül nem lehet egy tervezést igazolni, és (2) a numerikus hibák a rájuk vonatkozó megengedett érték csökkentésével befolyásolják a tervezett tárgy méreteit. Általában sokkal gazdaságosabb annak biztosítása, hogy τ értéke elhanyagolhatóan kicsi legyen, mint elfogadni a csökkentett F_{all} értékek használatából eredő következményeket.

2. VÉGESELEMES MODELLEZÉS ÉS NUMERIKUS SZIMULÁCIÓ

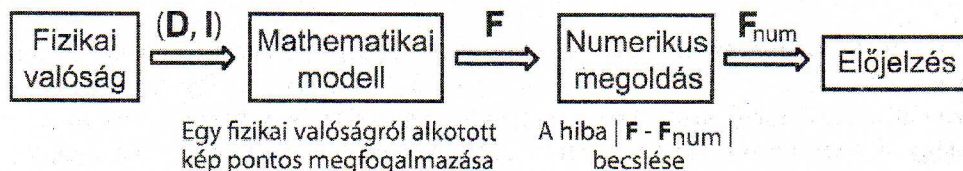
Gyakran találkozunk a végeselemes modellezés és a numerikus szimuláció összetévesztésével. Szakemberek sokszor numerikus szimulációról beszélnek, de valójában végeselemes modellezésre gondolnak. Fontos ezért a kettő közötti különbséget tisztáznunk.

Matematikai modell alatt egy transzformációt értünk, amely átalakít egy fizikai valóság leírásához szükséges adathalmazt, amit D - vel jelölünk, egy másik adathalmazba, amit F - el jelölünk (ez az előbb már definiált QoI). Az átalakítás egy fizikai valóságról alkotott kép pontos leírásán alapszik, amit I - vel jelölünk (idea of reality):

$$(D, I) \rightarrow F \quad (5)$$

ahol a nyíl a transzformációt, vagyis a matematikai modellt jelenti, amely lehetővé teszi a fizikai jelenségek előfordulásának vagy előfordulásuk valószínűségének előjelzését. A numerikus szimuláció intuitív volta a matematikai modellek megfogalmazására korlátozódik, míg számszerű megoldásuk az alkalmazott matematika jólismert és részletesen kidolgozott eljárásait foglalja magában.

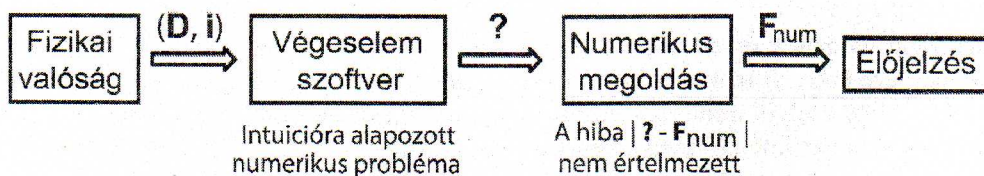
A matematikai modellek függetlenek attól, hogy milyen módszert választunk numerikus megoldásukra. Ez teszi lehetővé a matematikai modellek megfogalmazásával és számszerű közelítésével kapcsolatos hibák különálló kezelését. Az 1. ábra a numerikus szimulációk folyamatát ábrázolja.



1. ábra

A numerikus szimuláció sematikus ábrázolása

A 2. ábra a végeselemes modellezés folyamatát ábrázolja. Összevetve az első és második ábrát az alapvető különbség az, hogy a végeselem modell esetében az egzakt megoldás által meghatározott QoI (F) létezése nem szükségképpen bizonyított. Sok esetben F_{num} egy nemlétező F feltételezett közelítésének felel meg.



2. ábra

Végeselem modellek sematikus ábrázolása

A végeselem modell transzformációja formailag hasonlít a numerikus szimuláció transzformációjára, de attól lényegében eltér:

$$(D, i) \rightarrow F_{num} \quad (6)$$

ahol a kisbetűs i intuíciónra utal, amely alapján a felhasználó a végelem programokban található elemkönyvtárakból egy numerikus problémát állít fel. A numerikus eredmény sok esetben radikálisan eltér a helyes eredménytől, lásd pl. Szabó et al. [1].

Az elemkönyvtárak kialakulása a végelem módszer korai fejlesztésére vezethetőek vissza, amikor a végelemek megfogalmazásában együtt határozták meg az alkalmazott modellt (mint pl. rúd, lemez, héj, szilárd test stb. modellek variációs megfogalmazását) és a bázisfüggvényeket (a megközelítést). Lásd pl. Zienkiewicz [2]. Gyakori volt különleges eljárások, mint pl. a csökkentett numerikus integrálás, használata. A csökkentett integrálás azt jelenti, hogy a merevségi mátrix kiszámításánál az integrációs pontok minimális számánál kevesebbet alkalmaznak. Ezzel a témával számos tanulmány foglalkozott az 1970-es és 80-as években. Az elgondolás az volt, hogy az alacsony polinom fokszámú végelemek túlságosan merevek s a túlzott merevséget csökkentett integrációval lehet ellensúlyozni, lásd például Zienkiewicz et al. [3]. A csökkentett integrálás egyik nemkívánatos következménye olyanfajta alakváltozások megjelenése volt, amelyekhez zérus-energia párosult (hourglassing jelensége). További numerikus sémákat kellett kigondolni annak ellensúlyozására.

A fentiekben vázolt gondolatmenet jellemző a végelemes modellezés gondolatmenetére, miszerint a cél a numerikus megoldás beállítása (tuning), s nem egy matematikai probléma közelítő megoldása. Például az egyik termo-elasztikus problémák megoldására létrehozott hexaéderes elem leírása a következő: „20 csomópontú triquadrátikus elmozdulás, trilineáris hőmérséklet, hibrid, lineáris nyomás, csökkentett integrálás”. Nem található bizonyítás arra, hogy ez az elem kielégíti-e a stabilitás és konzisztencia követelményeit [4].

3. NUMERIKUS SZIMULÁCIÓK IRÁNYÍTÁSA

A fentemlített nehézségek ellenére lehetséges a végelem modellezést sikeresen alkalmazni bizonyos feltételek figyelembevételével. Komplikált szerkezeti problémák megoldására, mint pl. *automobilok ütközési dinamikája, repülőgépek szerkezeti elemzése*, végelem modelleket használnak. Ezek a modellek nem felelnek meg egy jól definiált matematikai probléma közelítő megoldásának, mégis hasznos eredményeket adhatnak. Érdekes módon a végelem modellek sikeres használata kétfajta ellentétes előjelű nagy hibának, a matematikai modellek megfogalmazásában elkövetett hibáknak és a numerikus megoldás hibáinak egymás közeli érvénytelenítésén alapszik. Jó végelem modellek szerkesztése nem tudományos, hanem intuitív, gyakorlati tevékenység.

A fogalmi hibák általában abból erednek, hogy a kiválasztott szerkezeti elemeket pontokban kapcsolnak, fognak be és terhelnek, ami nem megengedett a feladatok variációs megfogalmazásában. A csökkentett integrálás használata sem megengedett. Ezek az úgynevezett variációs bűntettek (variational crimes). Ezen hibák hatását négy tényező takarja (1) a végelem háló rögzített, tehát a QoI divergenciája nem észlelhető, (2) a divergencia sebessége alacsony, általában a szabadsági fokok logaritmusával arányos, (3) a célértékek (QoI) az elmozdulás és az eredő erők, nem pedig a helyi feszültségek vagy alakváltozások, amelyek jobban kimutatnák a hibákat, (4) a végelem modellt fizikai mérések vagy gyakorlatból már ismert összefüggések egyeztetésével állítják be. Alapos egyeztetés után ezek a modellek alkalmassá válnak arra, hogy különböző terhelések és a szerkezetben ébredő belső erők korrelációját megközelítsék.

A belső erők ismerete előfeltétele a tervezés folyamatának ami, legalábbis részben, a rugalmasságtan módszereinek alkalmazásán alapszik. A célértékek a feszültségek és a bevezetésben már ismertett szem-pontok figyelembevételével a numerikus közelítés hibáinak megbízható becslése egy alapvető műszaki követelmény. Ennek a követelménynek csak a numerikus szimuláció helyes alkalmazásával lehetséges eleget tenni.

A matematikai modellek érvényesítése (validation) mást jelent a végelem modell esetében, mint a matematikai modell esetében. A matematikai modell esetében a vizsgálat tárgya maga a matematikai modell, ami független attól, hogy melyik numerikus módszer használatát választottuk. A végelem modell esetében viszont a numerikus hiba az elméleti hibák ellensúlyozását szolgálja.

A jelen mérnöki kutatás területein, mint például új anyagtörvények megfogalmazása, a fáradási határérték konkrét esetekben való becslése, a szénszálak kompozit anyagok teherbíró képességének meghatározása, a megmunkálásból eredő maradékfeszültségek hatásának kiértékelése, megbízható eredményeket csak a numerikus szimuláció helyes alkalmazásával érhetünk el. A numerikus szimuláció bevezető jellegű ismertetésére [5] javasolt.

Tudományos és műszaki elméletek szubjektív jellegűek. Azok objektív kiértékeléséhez szükséges a gyakorlati megfigyelések egyeztetése az elmélettel és ahhoz megbízható adatok valamint megbízható számítási eljárások szükségesek. Ez a szimuláció irányításának (simulation governance) alapgondolata, amelynek

célja a numerikus szimuláción alapuló előrejelzések megbízhatóságának biztosítása és folyamatos, tervszerű növelése [6].

A szimuláció irányítására vonatkozó tervnek illeszkednie kell egy adott szervezetnek vagy szervezeti egységének a küldetéséhez: Ha a küldetés tervezési szabályoknak alkalmazása, akkor a cél a megoldások ellenőrzése és a munkafolyamat szabványosítása. Ha azonban ez a küldetés tervezési szabályoknak megfogalmazása vagy feltételes karbantartási döntéseknek meghozatala, akkor a cél a numerikus megoldások igazolása, a matematikai modellek érvényesítése és a statisztikai szórásokból eredő bizonytalanság mennyiségi meghatározása.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Szabó B., Babuška I., Pitkäranta J. and Nervi S., The problem of verification with reference to the Girkmann problem. *Engineering with Computers*, 2010, 26, 171-183.
- [2] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, London 1967.
- [3] Zienkiewicz O.C., Taylor R. L and Too J. M., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1971, 3, 275-190.
- [4] Arnold D., Stability, consistency, and convergence of numerical discretizations. In Björn Engquist, editor, *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, Springer 2015, 1358-1364.
- [5] Szabó B. and Babuška I., *Introduction to Finite Element Analysis. Formulation, Verification and Validation*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2011.
- [6] Szabó B and Actis R., Simulation governance: Technical requirements for mechanical design. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 2012, 249-252, 158-168.