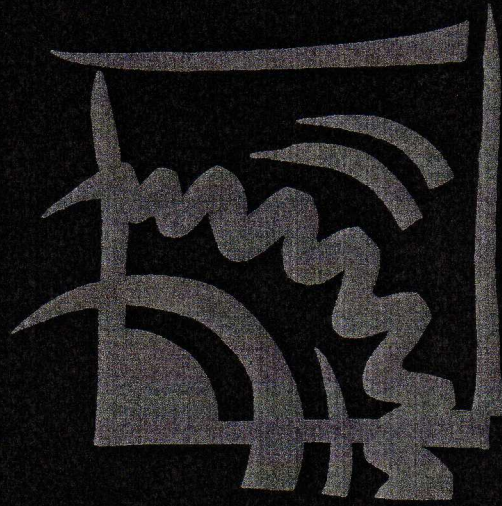


Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság  
Hungarian Technical Scientific Society of Transylvania

XXVI. Nemzetközi  
Gépészeti Konferencia



26<sup>th</sup> International Conference  
on Mechanical Engineering

**OGGÉPÉTI  
2018**

Marosvásárhely, 2018. április 26–29.  
Târgu Mureș, April 26-29, 2018

# P-verziós végelemeket felhasználó hierarchikus rúd modellek

## HIERARCHICAL ROD'S MODELS BY P-VERSION OF FINITE ELEMENTS

Dr. PÁCZELT István professzor emeritus 1), SZABÓ Barna professzor emeritus 2)

1: Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-269-5189, paczelt@freemail.hu  
2: Washington University in St. Louis, USA, tel: +1-314-435-2121, +36-30-713-9726, szabo@wustl.edu

### ABSTRACT

*It is possible to formulate various models for the simulation of the mechanical response of slender elastic bodies, such as elastic rods. Beginning with a simple technical rod model, one can continue with Timoshenko's and Reddy's model taking shear deformation into account. Progressively adding higher modes of deformation, a sequence of models is obtained the limit of which is the fully 3D model. The paper addresses finite element discretization based on the principle of minimum potential energy. The displacements fields are represented by the product of one-dimensional field functions and two-dimensional director functions. Numerical examples are presented to illustrate the performance characteristics of the algorithm.*

### ÖSSZEFOGLALÓ

*Rúdszerű rugalmas testek szilárdságtani problémáinak tisztázására különféle modelleket használhatunk. Kezddhetjük a legegyszerűbb rúdmodellel, majd pontosíthatjuk azt a Timoshenko, Reddy féle nyírési energiát is figyelembevevő modellel. További pontosítások érhetők el újabb mezők felvételével, haladva a 3D-s állapot felé. A cikk röviden bemutatja a potenciális energia minimum elvre alapozott végeselemes közelítést, az elmozdulásmezőknek az un. egy változós mező-függvények és a két változós irányfüggvények szorzatainak összegén keresztüli képzését. Számpéldákkal illusztráljuk a modellezés hatékonyságát.*

**Kulcsszavak:** hierarchikus modellezés, végeelem-módszer, rugalmasságtan

### 1. BEVEZETÉS

Antman híres átfogó cikkében [1] jó áttekintést ad a görbe rudak hierarchikus felépítéséről.

Kisparaméterek szerinti sorbafejtéssel halad a 3D-s állapotból az 1D-s klasszikus rúdmodellhez. Szigorú elméleti vizsgálatokon túl cikke azonban numerikus példákat nem tartalmaz.

A jelen előadás fő célja a kontinuum feladat végeselemes vizsgálatával numerikus eredményeket is bemutasson. A jelen munkában prizmatikus, síkgörbe rudakat és térbeli spirál középvonalú rudakat vizsgálunk feltételezve, hogy a rúd anyaga homogén, izotróp, lineárisan rugalmas, a terhelés kvázistatikus, az elmozdulások és alakváltozások kicsinyek, azaz a lineáris rugalmasságtan keretei között vizsgáljuk a peremérték feladatot.

A vizsgálatra a potenciális energia minimum elvre alapozott végeselemes közelítést választjuk, az elmozdulásmezőket az un. mezőfüggvények (field functions) és irányfüggvények (director functions) szorzatainak összegén keresztül közelítjük [2]. A vizsgálatokat görbevonallú koordináta-rendszerben végezzük el. A keresztmetszet síkjában a keresztmetszet súlypontján áthaladó egymásra merőleges tengelyekre merőleges lesz a középvonal érintője. Ezen tengelyek által kijelölt lokális koordináta-rendszerben értelmezett elmozdulásokat és szögelfordulásokat a szokásos úton transzformáljuk a globális Descartes koordináta-rendszerbe. A középvonalhoz kapcsolt kísérő triédert a Serret-Frenet képletekkel állítjuk elő. Az irányfüggvények a Pascal háromszöghöz tartozó polinomok szerint változnak a keresztmetszetben, a mezőfüggvények (a test hossztengele mentén)  $p$ -verziójú végeelem technikával nyernek közelítést [2]. Az irányfüggvények polinomjainak fokszámától függően különböző hierarchikus modellekhez jutunk, a kapott eredményeket a 3D-s modellel a StressCheck végeelem programmal [3] vetjük össze. Rögzített irányfüggvényeknél a mezőfüggvényeknél felvett polinomok fokszámától függően vizsgálhatjuk a numerikus közelítés konvergenciáját, míg a hierarchikus modellek egymásutánosságától kapott eredmények szolgáltatnak további információt a tényleges 3D-s állapot megközelítésére.

## 2. MODELL FELEPÍTÉSE

Vizsgáljunk egy  $R_0$  sugarú hengerfelületre rátekert  $H$  menetemelkedésű spirál középvonalú testet lineáris rugalmasságtani keretek között. A görbe test (rúd) középvonalának helyvektora

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = R_0 (\cos(\varphi) \mathbf{i} + \sin(\varphi) \mathbf{j}) + \frac{H}{2\pi} \varphi \mathbf{k} \quad (1)$$

ahol a  $\varphi$  - a hengerkoordináta-rendszer szöge. Jelölje  $s$  a középvonalon mért ívkoordinátát.

A Serret-Frenet-féle összefüggésekkel a spirálhuzal helyi koordinátarendszerének normális, binormális és érintő irányú  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$  egységvektorai, a főgörbület  $\kappa$  és annak sugara  $R_1$ , az egységnyi hosszra eső elcsavarodás  $\tau$  előállíthatóak. A triéder csúcspontjának elmozdulását a helyi koordinátarendszerben  $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  irányú független elmozdulás mezővel  $(u_{01}, u_{02}, u_{03})$ , míg a szögelfordulását  $\chi_i, i=1,2,3$ -al jellemezzük. A mechanikai állapotot az  $(x,y,s)$  görbevonalú koordinátarendszerben írjuk le. Az  $x$  és  $y$  tengelyek essenek egybe a keresztmetszet főtengelyeivel. Itt  $x$  és  $y$  az  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{b}$  irányú koordinátákat jelöli, míg  $s$  koordináta vonal  $\mathbf{t}$  irányában haladjon át.

### 2.1 Elmozdulások

A test egy tetszőleges P pontjának elmozdulása

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b} + u_t \mathbf{t} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

amit

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = \mathbf{u}_0(s) + \sum_{i=1}^{iH} \mathbf{h}^{(i)}(x, y, s) \quad (3)$$

alakban fogunk közelíteni. Itt  $\mathbf{h}^{(i)}(x, y, s)$  a választott hierarchikus modelltől függ, amiben szereplő függvények felvételéhez a jól ismert Pascal háromszögbe foglalt függvényeket fogjuk felhasználni. Példaként álljon két függvény, mely az alábbi

$$\mathbf{h}^{(1)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} -y \chi_3 \\ +x \chi_3 \\ +y \chi_1 - x \chi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(2)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} (x^2 u_{1x^2} + xy u_{1xy} + y^2 u_{1y^2}) \\ (x^2 u_{2x^2} + xy u_{2xy} + y^2 u_{2y^2}) \\ (x^2 u_{3x^2} + xy u_{3xy} + y^2 u_{3y^2}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Itt  $\chi_i, u_{ix^2}, u_{ixy}, u_{iy^2}, i=1,2,3$  un. mező függvények, melyek az  $s$  függvényei, míg  $x, y, x^2, xy, y^2$  az un. irány függvények.

### 2.2 Alakváltozások

Az alakváltozási tenzor kis alakváltozáskor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, s) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \quad (5)$$

geometriai egyenleten keresztül számolható. Itt  $\otimes$  a diadikus szorzás jele.

$$\text{A nábla operátor } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{b} + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{t} \quad (6)$$

Az  $s$  irányú fajlagos nyúlás  $\varepsilon_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3$ , az  $x$  és  $y$  irányúak  $\varepsilon_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1$ ,  $\varepsilon_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2$ , míg a szögtorzulások

$$\frac{1}{2} \gamma_{13} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \frac{1}{2} \gamma_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \frac{1}{2} \gamma_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2 \quad (7)$$

amelyek esetünkben a számítások után

