

INHOMOGEN RUGALMAS ANYAGÚ KÚPOK STATIKAI VIZSGÁLATA

STATIC ANALYSIS OF NONHOMOGENEOUS ELASTIC CONICAL BODIES

*Ecsedi István, Professor Emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet;
Baksa Attila, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet*

ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT). The object of this paper is to determine the stresses in hollow inhomogeneous elastic conical body caused by inner and outer pressures applied to its mantles. It is assumed that the nonhomogeneous elastic material is incompressible, that is the Poisson's ratio is 0.5. An analytical method is developed to solve the boundary value problem of elastic equilibrium. Two types of nonhomogeneity are considered, first case is the layered conical body and the second case deals with the functionally gradient material (FGM).

1. BEVEZETÉS

Az 1. ábra szemlélteti a vizsgálat tárgyát képező üreges kúp alakú testet. Az üreges kúp alakú testet az O csúcspontú ∂V_1 és ∂V_2 körkúp felületek, valamint az O középpontú ∂V_3 és ∂V_4 gömbfelületek határolják. A mechanikai feladata megfogalmazására az $Or\varphi\vartheta$ gömbkoordináta-rendszert használtuk (1. ábra). A statikai peremérték feladat megoldásával kapcsolatban feltételezzük, hogy

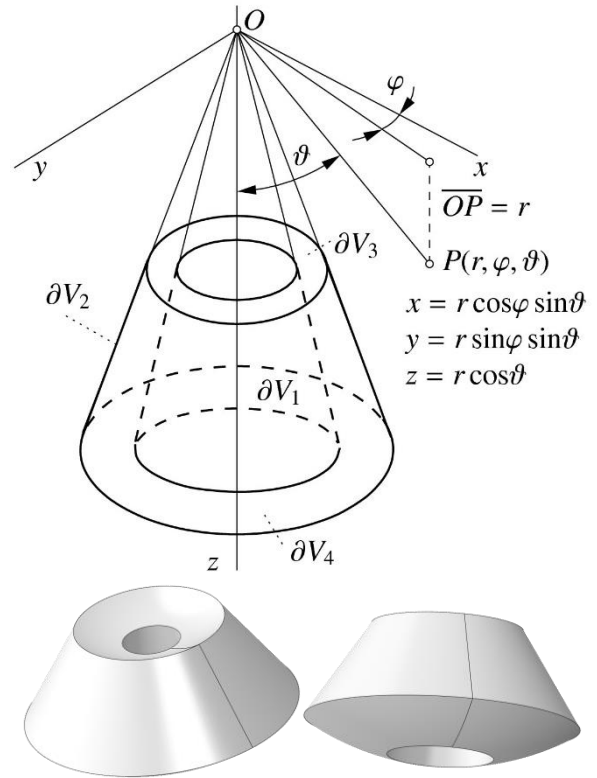
1. Az alakváltozások és az elmozdulások kicsinyek.
2. Nincs térfogati terhelés.
3. A test anyaga ideálisan rugalmas, összenyomhatatlan, vagyis a Poisson tényező $\nu = 0.5$.
4. Rétegzett inhomogenitás esetében a rétegek kapcsolata tökéletes, mindenfajta elcsúszás, elválás kizárt.
5. FGM anyag esetében a G csúsztató rugalmassági modulus a ϑ gömbi koordináta folytonos függvénye.

Jelölje $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ és \mathbf{e}_ϑ az $Or\varphi\vartheta$ gömbi koordináta-rendszer egységvektorait. A tanulmány tárgyát alkotó statikai peremértékfeladatot az alábbi peremfeltételek határozzák meg:

$$u_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\vartheta} = 0, \quad P \in \partial V_3 \cup \partial V_4, \quad (1)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \tau_{\varphi\vartheta} = 0, \quad \sigma_\vartheta = -p_1, \quad P \in \partial V_1, \quad (2)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \tau_{\varphi\vartheta} = 0, \quad \sigma_\vartheta = -p_2, \quad P \in \partial V_2. \quad (3)$$



1. ábra. Üreges körkúp alakú test

Az elmozdulás vektor skalár koordinátáit $u_r, u_\varphi, u_\vartheta$, míg a feszültségi tenzor elemeit pedig $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\vartheta, \tau_{r\varphi}, \tau_{r\vartheta}, \tau_{\varphi\vartheta}$ jelöli az $Or\varphi\vartheta$ gömbi koordináta-rendszerben [1,2,3,4]. Az (1) egyenletben megfogalmazott vegyes peremfeltételek sima, merev gömbfelületekkel történő megtámasztás révén realizálhatók, hasonlóan a véges hosszúságú síkalakváltási állapotban lévő rugalmas testekhez. Ez utóbbi esetben az axiális elmozdulást sima merev síkkal való megtámasztás teszi lehetetlenné.

A kitűzött statikai feladat megoldását az alábbi elmozdulás mezőből származtatjuk:

$$u_r = u_\varphi = 0, \quad u_\vartheta = rU(\vartheta). \quad (4)$$

A fenti elmozdulásoknak megfelelő alakváltozások [1-3]

$$\varepsilon_r = \gamma_{r\varphi} = \gamma_{r\vartheta} = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \quad \varepsilon_\varphi = U \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (6)$$

Az izotrop, lineárisan rugalmas összenyomhatatlan test anyagtörvénye alapján [3-7] írható, hogy

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \sigma_0, \quad \sigma_\varphi = 2G\varepsilon_\varphi + \sigma_0, \quad (7)$$

$$\sigma_\vartheta = 2G\varepsilon_\vartheta + \sigma_0, \quad \tau_{r\varphi} = G\gamma_{r\varphi}, \quad (8)$$

$$\tau_{r\vartheta} = G\gamma_{r\vartheta}, \quad \tau_{\varphi\vartheta} = G\gamma_{\varphi\vartheta}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\vartheta = 0, \quad (10)$$

ahol G a csúsztató rugalmassági modulusot jelöli. A tanulmány tárgyát képező inhomogén rugalmas test esetében a csúsztató rugalmassági modulus a ϑ gömbi koordináta függvénye, vagyis $G = G(\vartheta)$. A (7) és (8) egyenletekben σ_0 a közepes normál feszültséget jelöli [3-7]

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_\vartheta}{3}. \quad (11)$$

A fenti egyenleteket a jelen problémára alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_\vartheta = 2G\varepsilon_\vartheta + \sigma_0, \quad \sigma_\varphi = 2G\varepsilon_\varphi + \sigma_0, \quad (12)$$

$$\sigma_r = \sigma_0 = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta}{2}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + U \operatorname{ctg} \vartheta = 0. \quad (14)$$

A (14) egyenletből az következik, hogy

$$U(\vartheta) = \frac{K}{\sin \vartheta}, \quad \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2. \quad (15)$$

A ϑ_1 és ϑ_2 gömbi koordinátákat a 2. ábra értelmezi, továbbá K egy integrációs állandó.

A mechanikai egyensúly egyenletei zérus térfogati terhelés esetén gömbi koordináta rendszerben az alábbi alakban adhatók meg [1,2]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + 2\sigma_r - \right. \quad (16)$$

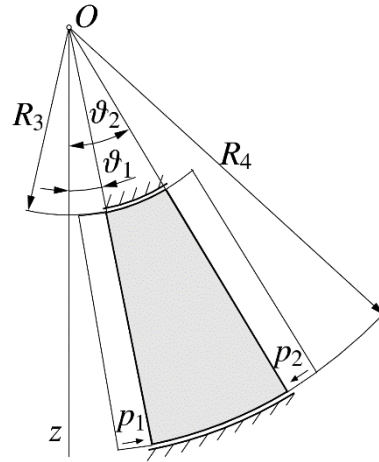
$$\left. \sigma_\varphi - \sigma_\vartheta + \tau_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 3\tau_{r\varphi} + \right. \quad (17)$$

$$\left. 2\tau_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + 3\tau_{r\vartheta} + \right. \quad (18)$$

$$\left. (\sigma_\varphi - \sigma_\vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta \right] = 0.$$



2. ábra. Az üreges körkúp alakú test meridián metszete

A feladat forgásszimmetriájából az következik, hogy a feszültségek φ polárszög szerinti parciális deriváltjai identikusan zérussal egyenlők. Belátható, hogy a (16), (17) egyensúlyi egyenletek a vizsgált peremérték feladatban identikusan teljesülnek és a (18) egyensúlyi egyenletből pedig az következik, hogy

$$\frac{d\sigma_\vartheta}{d\vartheta} + (\sigma_\varphi - \sigma_\vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta = 0. \quad (19)$$

A (6) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon_\vartheta = -K \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}, \quad \varepsilon_\varphi = K \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}. \quad (20)$$

A (12), (13) egyenletek és a (20) egyenlet kombinálásával nyerjük a (21) egyenletet

$$\sigma_\vartheta = -2GK \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \sigma_0, \quad (21)$$

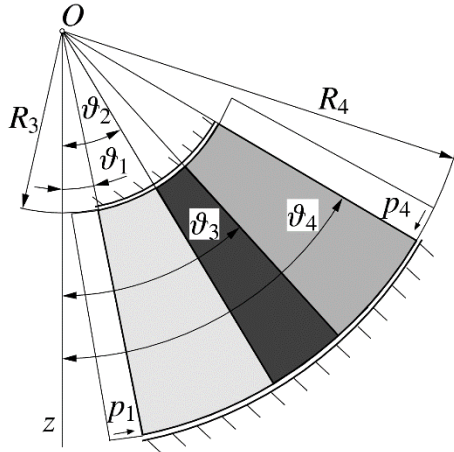
$$\sigma_\varphi = 2GK \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \sigma_0.$$

A (21) egyenletek (19) egyenletbe való helyettesítése az alábbi eredményre vezet

$$\frac{d\sigma_\vartheta}{d\vartheta} = 4KG \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta}. \quad (22)$$

2. RÉTEGZETT RUGALMAS KÚP

A 3. ábra szemlélteti a meridián metszetét a vizsgált kompozit kúp alakú testnek. A $\vartheta_i \leq \vartheta \leq \vartheta_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n$) szögkoordinátával, valamint az $R_3 \leq r \leq R_4$ sugárkoordinátával kijelölt rugalmas tartomány jele i ($i = 1, \dots, n$).



3. ábra. Rétegzett üreges kúp alakú test

Az előző fejezet egyenletei alapján írható, hogy

$$\sigma_{i\vartheta} = -2G_i K \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \sigma_{i0}(\vartheta), \quad (23)$$

$$(\vartheta_i \leq \vartheta \leq \vartheta_{i+1}),$$

$$\sigma_{i\varphi} = 2G_i K \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \sigma_{i0}(\vartheta), \quad (24)$$

$$(\vartheta_i < \vartheta < \vartheta_{i+1}),$$

ahol G_i az i jelű kúp alakú összenyomhatatlan rugalmas test csúsztató rugalmassági modulusát jelöli. A (19) és a (21) egyenletekből az következik, hogy

$$\frac{d\sigma_{i0}}{d\vartheta} - 2G_i K \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right) - 4G_i K \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} = 0. \quad (25)$$

A (25) egyenlet integrálásával azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{i0}(\vartheta) = \sigma_{i\varphi}(\vartheta) = -2KG_i \ln \left| \tan \frac{\vartheta}{2} \right| + c_i, \quad \vartheta_i \leq \vartheta \leq \vartheta_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (26)$$

Egyszerű számolással adódik a $\sigma_{i\vartheta}$ és a $\sigma_{i\varphi}$ normálfeszültségekre az alábbi két képlet

$$\sigma_{i\vartheta}(\vartheta) = -2KG_i \left[\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \ln \left| \tan \frac{\vartheta}{2} \right| \right] + c_i, \quad \vartheta_i \leq \vartheta \leq \vartheta_{i+1}, \quad (27)$$

$$\sigma_{i\varphi}(\vartheta) = 2KG_i \left[\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \ln \left| \tan \frac{\vartheta}{2} \right| \right] + c_i, \quad \vartheta_i \leq \vartheta \leq \vartheta_{i+1}. \quad (28)$$

A felírt képletekben szereplő ismeretlen mennyiségeket (K, c_1, c_2, \dots, c_n) az alábbi perem és illesztési feltételek kielégítéséből nyerjük:

$$\sigma_{1\vartheta}(\vartheta_1) = -p_1, \quad \sigma_{n\vartheta}(\vartheta_{n+1}) = -p_{n+1}, \quad (29)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sigma_{i\vartheta}(\vartheta_{i+1} - \varepsilon^2) - \sigma_{(i+1)\vartheta}(\vartheta_{i+1} + \varepsilon^2) \right] = 0, \quad (30)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

A (29) egyenletek a $\vartheta = \vartheta_1$ és $\vartheta = \vartheta_{n+1}$ egyenletekkel kijelölt kúpfelületekhez tartozó feszültségi peremfeltételekhez kapcsolódó egyenletek, ahol p_1 és p_{n+1} az alkalmazott terhelések (nyomások) értékeit jelölik. Az egyes rétegek határfelületein a σ_ϑ normálfeszültség folytonos függvénye a ϑ változónak. Ez utóbbi feltétel fennállását a (30) egyenlet biztosítja.

4. FUNKCIONÁLISAN GRADIENS ANYAGÚ KÚPALAKÚ TEST

Funkcionálisan gradiens anyagú összenyomhatatlan rugalmas kúp alakú test esetében G a ϑ szögkoordináta folytonos függvénye, azaz $G = G(\vartheta)$. A vizsgált test meridián metszetét és az alkalmazott terhelést a 2. ábra szemlélteti a (22) egyenlet és a (2. ábra)

$$\sigma_\vartheta(\vartheta_1) = -p_1, \quad \sigma_\vartheta(\vartheta_2) = -p_2, \quad (31)$$

statikai peremfeltételek kombinálásával jutunk a K állandó értékéhez

$$K = \frac{p_1 - p_2}{4 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} G(\vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} d\vartheta}. \quad (32)$$

A (22) egyenlet integrálásával közvetlenül megkapható a $\sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta(\vartheta)$ feszültség képlete

$$\sigma_\vartheta(\vartheta) = -p_1 + \frac{p_1 - p_2}{\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} G(\vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} d\vartheta} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} G(\alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} d\alpha. \quad (33)$$

A (21) egyenletből egyszerű számolással adódik, hogy

$$\sigma_0 = \sigma_r = -p_1 + \frac{p_1 - p_2}{\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} G(\vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} d\vartheta} \left[\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} G(\alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} d\alpha + G(\vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{2 \sin^3 \vartheta} \right]. \quad (34)$$

A $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(\vartheta)$ normál feszültség számítása az alábbi egyenlet alapján történik

$$\sigma_\varphi = (\sigma_\varphi - \sigma_\vartheta) + \sigma_\vartheta = 4KG(\vartheta) \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \sigma_\vartheta(\vartheta). \quad (35)$$

Részletes számítás az alábbi eredményre vezet

$$\sigma_\varphi = -p_1 + \frac{p_1 - p_2}{\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} G(\vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} d\vartheta} \left[\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} G(\alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} d\alpha + G(\vartheta) \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right]. \quad (36)$$

4. NUMERIKUS PÉLDÁK

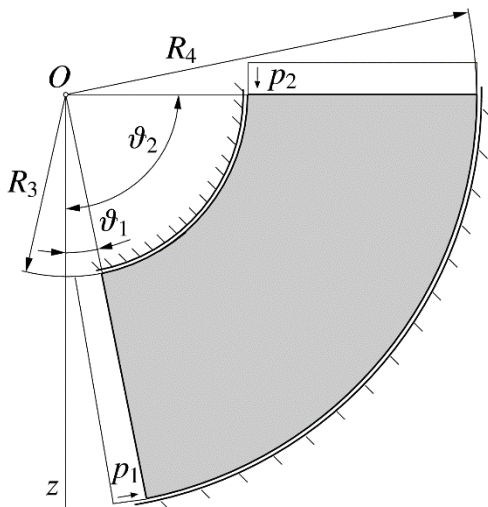
4.1. Funkcionálisan gradiens anyagú kúp alakú test

A numerikus példában az alábbi adatokat használtuk (4. ábra)

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{20}, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad G = G_0 \exp(a\vartheta), \quad a = 0,2,$$

$$G_0 = 0,1 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 5 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

Mivel az alakváltozások és feszültségek függetlenek az r sugár koordinátától az R_3, R_4 ($R_3 < R_4$) értékét nem adtuk meg.



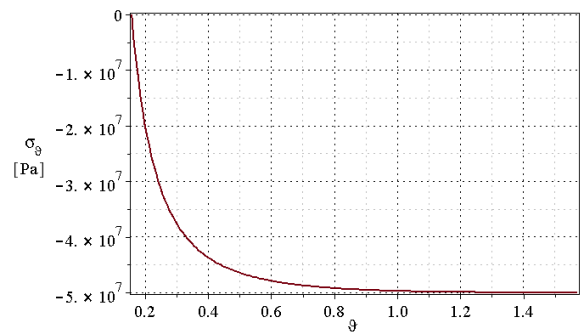
4. ábra. Funkcionálisan gradiens anyagú üreges kúp alakú test

A (32) képlet alkalmazásával azt kaptuk, hogy

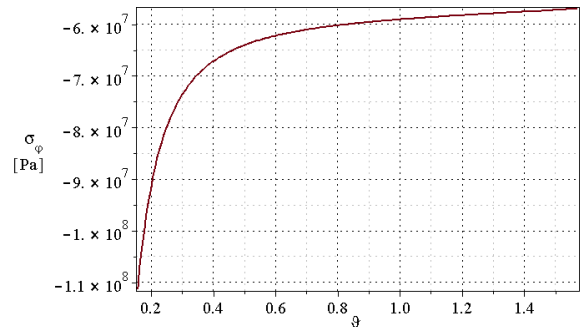
$$K = -0,006265496108. \quad (37)$$

Az 5. ábra a $\sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta(\vartheta)$, a 6. ábra a $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(\vartheta)$ és a 7. ábra a $\sigma_0 = \sigma_r = \sigma_r(\vartheta)$ feszültségeket szemlélteti a ϑ változó függvényeként. A von Mises feszültség $\sigma_M = \sigma_M(\vartheta)$ függvényét a 8. ábra mutatja be. Egyszerű számolással azt kapjuk, hogy

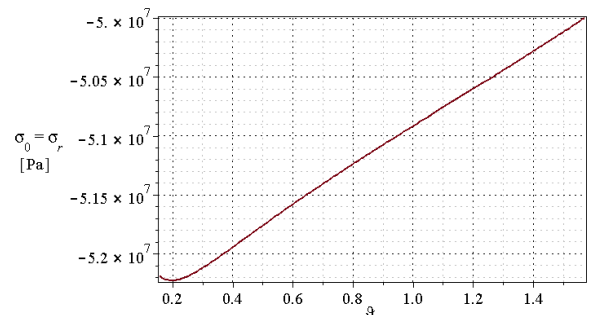
$$\max \{ \sigma_M(\vartheta) | \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 \} = 9,035510123 \times 10^7 \text{ Pa}. \quad (38)$$



5. ábra. A $\sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta(\vartheta)$ függvény szemléltetése FGM kúpra.



6. ábra. $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(\vartheta)$ függvény szemléltetése FGM kúpra



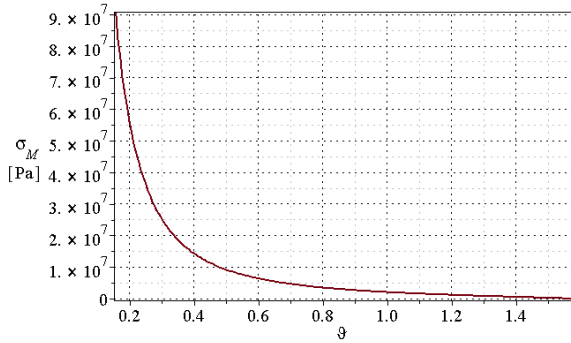
7. ábra. A $\sigma_r = \sigma_r(\vartheta)$ függvény szemléltetése FGM kúpra

4.2. Rétegzett összenyomhatatlan rugalmas kúp alakú test.

A bemutatásra kerülő numerikus példa négy rétegből felépülő kompozit kúpra vonatkozik. Az

egyres rétegeket meghatározó szögkoordináták az alábbiak:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{20}, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{10}, \quad \vartheta_3 = \frac{\pi}{6}, \quad \vartheta_4 = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_5 = \frac{\pi}{2}.$$



8. ábra. A $\sigma_M = \sigma_M(\vartheta)$ függvény szemléltetése FGM kúpra

Az alkalmazott terhelések $p_1 = 0$,
 $p_5 = 50 \times 10^6$ Pa.

$$G_1 = G_0 \exp\left[\frac{a}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right] = 1,048252 \times 10^8 \text{ Pa}, \quad (39)$$

$$G_2 = G_0 \exp\left[\frac{a}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_3)\right] = 1,087385 \times 10^8 \text{ Pa}, \quad (40)$$

$$G_3 = G_0 \exp\left[\frac{a}{2}(\vartheta_3 + \vartheta_4)\right] = 1,1700881 \times 10^8 \text{ Pa}, \quad (41)$$

$$G_4 = G_0 \exp\left[\frac{a}{2}(\vartheta_4 + \vartheta_5)\right] = 1,29926587 \times 10^8 \text{ Pa}, \quad (42)$$

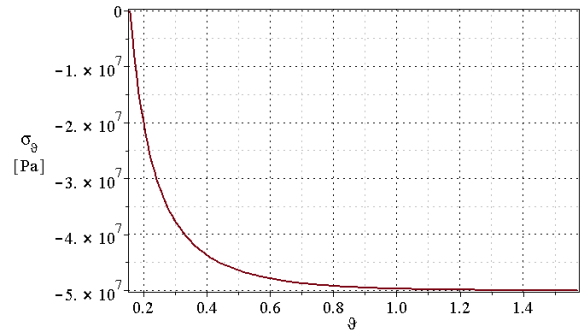
Itt G_0 és a értékét a 4.1. feladatban adtuk meg. A csúszató rugalmassági modulusok fenti megválasztásával egy közelítő módszer alkalmazására nyílik lehetőség a FGM anyagú kúp alakú testre levezetett megoldásnak az ellenőrzésére. A számítások eredményeit a 9. a 10. a 11. és a 12. ábra szemlélteti.

$$\max\{\sigma_M(\vartheta) | \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_5\} = 9,124975 \times 10^7 \text{ Pa}. \quad (43)$$

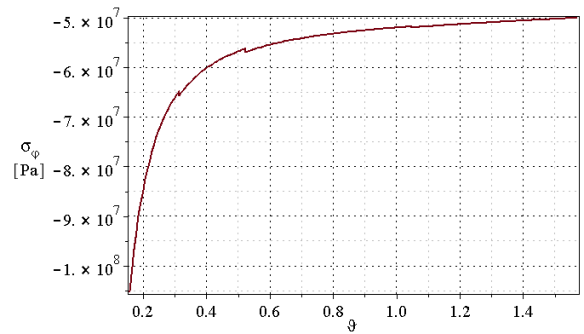
5. TÖMÖR KÚPALAKÚ TEST

A 13. ábra szemlélteti az összenyomhatatlan rugalmas anyagú tömör kúp alakú test meridián met-szetét és az alkalmazott terhelést. A G csúszató rugalmassági modulus és a ϑ szögkoordináta tet-

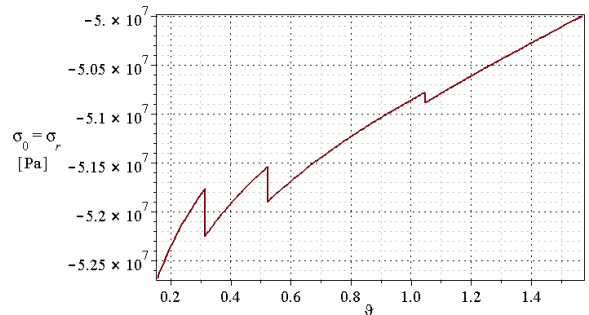
szőleges pozitív értékű függvénye. Lehet folytonos, illetve szakaszonként folytonos a $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ intervallumban.



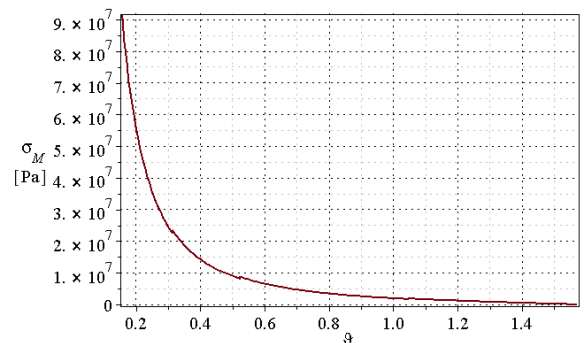
9. ábra. A $\sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta(\vartheta)$ függvény szemléltetése rétegzett kompozit kúpra



10. ábra. A $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(\vartheta)$ függvény szemléltetése rétegzett kompozit kúpra



11. ábra. A $\sigma_r = \sigma_r(\vartheta)$ függvény szemléltetése rétegzett kompozit kúpra



12. ábra. A $\sigma_M = \sigma_M(\vartheta)$ függvény szemléltetése rétegzett kompozit kúpra

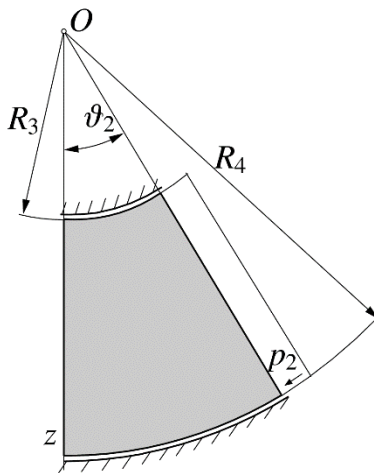
Az elmozdulások véges voltából az következik, hogy $K = 0$, azaz $U = 0$, vagyis a test minden pontjában

$$u_r = u_\varphi = u_g = 0 \quad (44)$$

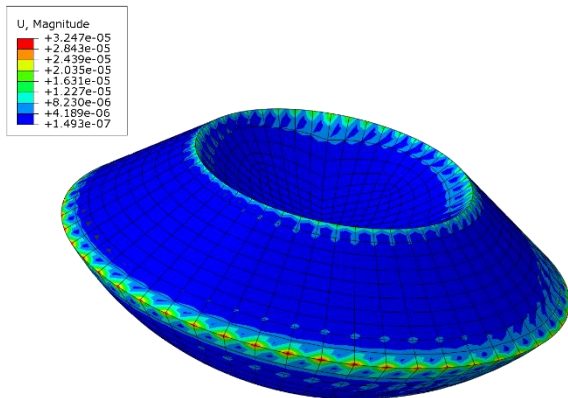
függetlenül a $G = G(\mathcal{G})$ függvénytől és a p_2 terheléstől. A (16-18) mechanikai egyensúlyi egyenletek és az (1-3) egyenletekben megfogalmazott peremfeltételi előírások nyilván teljesülnek, ha a test minden pontjában

$$\sigma_g = \sigma_\varphi = \sigma_r = \sigma_0 = -p_2, \quad (45)$$

vagyis a vizsgált rugalmas tömör kúp hidrosztatikus feszültségi állapotban van, melyet a 14. 15. és 16. ábrákon szemléltettünk a végeeselemes megoldás alapján.



13. ábra. Tömör kúp alakú összenyomhatatlan rugalmas test meridián metszete ($\mathcal{G}_1 = 0$)



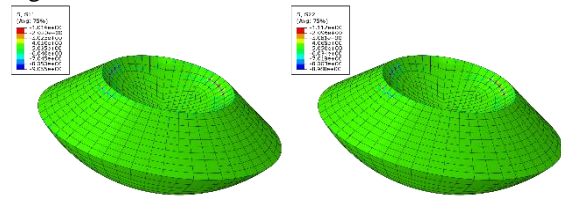
14. ábra. Az u elmozdulásmező

6. KÖVETKEZTETÉSEK

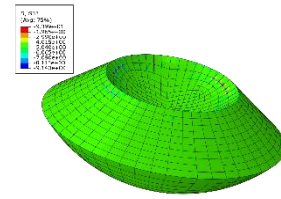
A dolgozat tárgyát inhomogén, összenyomhatatlan, rugalmas kúpok egy statikai peremértékfeladata alkotja. A kúpok külső és belső palást felületein előírt normál felületi terhelés (nyomás) működik. Analitikus megoldás került kidolgozásra a rétegzett kompozit kúpokra és a funkcionálisan gradiens anyagú kúpra. A numerikus példákat

olyan adatokkal számoltuk ki, amikor is a rétegzett kompozit kúpra vonatkozó megoldás a funkcionálisan gradiens anyagú kúpra vonatkozó analitikus megoldás egy közelítő megoldásaként interpretálható.

Köszönetnyilvánítás: A tanulmány elkészítését a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Hivatal (NKFIH) K115701 projektre támogatta. A cikkben ismertetett kutatás munkája az EFOP-3.6.2-16-2016-00011 jelű „Fiatalkodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.



15. ábra. A σ_r és a σ_φ feszültségek



16. ábra. A σ_g feszültség

6. IRODALOM

- [1] W.S. Slaughter, *The linearized Theory of Elasticity*, Birkhäuser, Basel, 2002.
- [2] I.S. Solonnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, (2nd ed.), McGraw-Hill, New York, 1956.
- [3] I. Ecsedi, A. Baksa, Spherical strain state of incompressible elastic bodies, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 11(1), pp.17-32, 2016.
- [4] I. Golecki, On the fundamentals of the theory of elasticity of plane incompressible non-homogeneous media, *Lecture in I.U.T.A.M. Symposium of Non-homogeneous in Elasticity and Plasticity*, Warsaw, 1959.
- [5] I. Golecki, On the assumption of incompressibility in plane problems of elasticity, *Arch. Mech. Stos.*, 9(3), pp.297-301, 1959.
- [6] I. Golecki, Statics of an incompressible elastic solid, *Arch. Mech. Stos.*, 1(4), pp.35-46, 1961.
- [7] M.E. Gurtin, *The Linear Theory of Elasticity in Handbuch der Physik II/2.*, (Ed. S. Flüge), Springer, Berlin, 1972.