

# Hierarchikus rúd modellekkel végzett számítások néhány eredménye

## EXAMPLES OF NUMERICAL SOLUTION OF HIERARCHIC ROD MODELS

DR. PÁCZELT István professor emeritus 1), SZABÓ Barna professor emeritus 2)

1: Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-269-5189, paczelt@freemail.hu

2: Washington University in St. Louis, USA, tel:+36-46-565-162, szabo@wustl.edu

### ABSTRACT

A brief summary of the results of recent research on hierarchic rod models is presented. The presentation covers key features of the formulation and the numerical approximation of the exact solution of elastic rod models by the  $p$ -version of the finite element method. Hierarchic rod models are semi-discretizations based on the idea that the displacement field can be decomposed as a product of arbitrary longitudinal and fixed transverse displacement functions. Numerical examples are presented.

### ÖSSZEFOGLALÓ

A cikk röviden leírja az [1]-ben bemutatott hierarchikus rúdmodellel végzett számítások néhány eredményét, a modellek főbb jellegzetességeit, a  $p$ -verziós végelelemes közelítést, az elmozdulásmozgóknek az ún. mező függvények és irány függvények szorzatainak összegén keresztüli képzését. Számpéldákkal illusztráljuk a modellezés hatékonyságát.

**Kulcsszavak** hierarchikus modellezés, végelelem-módszer, rugalmasságtan

### 1. BEVEZETÉS

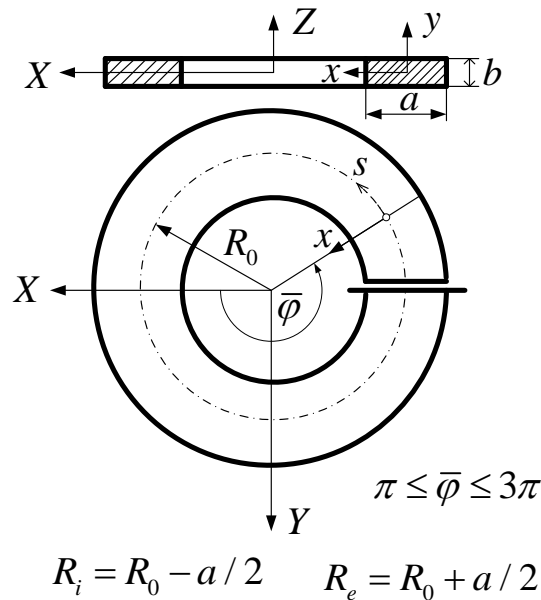
A jelen munkában prizmatikus-, síkgörbe rudakat és térbeli spirál középvonalú rudakat vizsgálunk feltételezve, hogy a rúd anyaga homogén, izotróp, lineárisan rugalmas, a terhelés kvázistatikus, az elmozdulások és alakváltozások kicsinyek, azaz a lineáris rugalmasságtan keretei között vizsgáljuk a peremérték feladatot. Az előző OGÉT-on bemutatott anyagban [1] ismertetett elvek alapján kidolgozott  $p$ -verziós [2] végelelem programmal kiszámolt néhány eredményt ismertetünk. Az 1. táblázat a kidolgozott hierarchikus végelemek főbb jellemzőit foglalja össze.

1. Táblázat: A hierarchikus modellek főbb jellemzői

Hierarchikus modell jele	Csomópontbeli ismeretlenek száma NDOF	Belső csomópontok száma	Elem csomópontjainak száma	AD=Belső ismeretlenek száma	ND=elem szabadságfoka
h0	6	6	8	6(p-1)	12+AD
h1	8	8	10	8(p-1)	16+AD
h2	17	17	19	17(p-1)	34+AD
h3	29	29	31	29(p-1)	58+AD
h4	44	44	46	44(p-1)	88+AD
h5	62	62	64	62(p-1)	124+AD
h6	83	83	85	83(p-1)	166+AD

## 2. GÖRBE TARTÓRA VONATKOZÓ NÉHÁNY SZÁMPÉLDA

Geometriai adatok:  $R_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$ . Az anyag lineárisan rugalmas, homogén, izotróp. Anyagállandók: rugalmassági modulus  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , Poisson szám  $\nu = 0.3$ .



1. Ábra. Görbe tartó geometriája, a globális XYZ koordinátarendszer, ill. a lokális  $xys$  koordinátarendszer. A  $\bar{\varphi} = 3\pi$  sík befalazott.

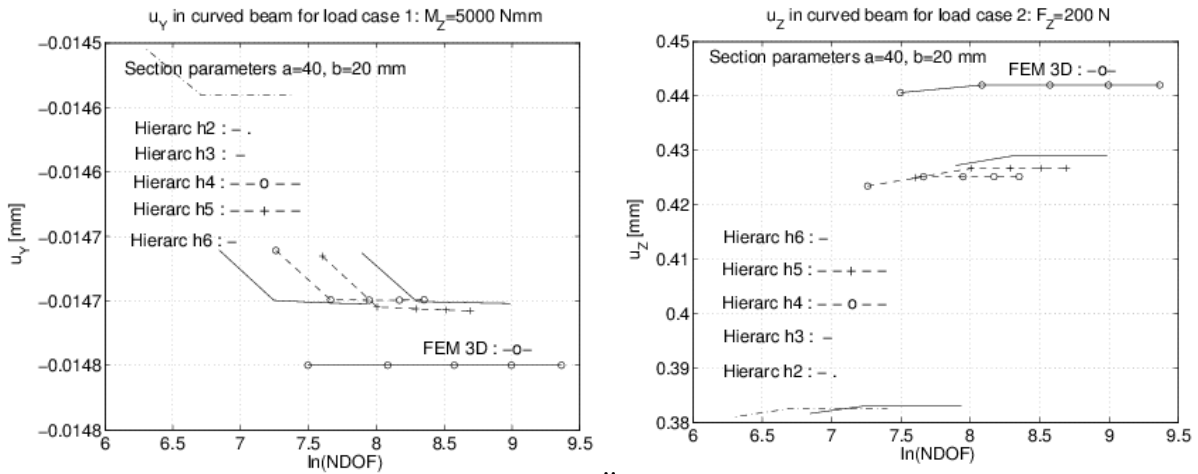
A terheléseket a 2. táblázat foglalja magába. Koncentrált erők és nyomatékok működhetnek a görbe rúd  $\bar{\varphi} = \pi$  metszetében, annak súlypontjában (1-3 terhelési esetek), ill. a helyi görbevonalú  $x,y,s$  koordinátarendszerben értelmezett felületen megoszló terhelések is hathatnak (5,6 terhelési eset). A 4. terhelési esetben a középvonal mentén megoszló függőleges terhelést vesszük figyelembe. Az 5. terhelés a belső  $R_i = 80 \text{ mm}$  sugarú hengeres felületen működik, mint nyomó feszültség, azaz  $-x$  irányában hat. A 6. terhelés a  $y = -b/2$  felületen hat felfelé, azaz  $Z$  ( $y$ ) irányában, tehát itt is nyomás működik a testre.

2. Táblázat: A görbe tartóra ható terhelések

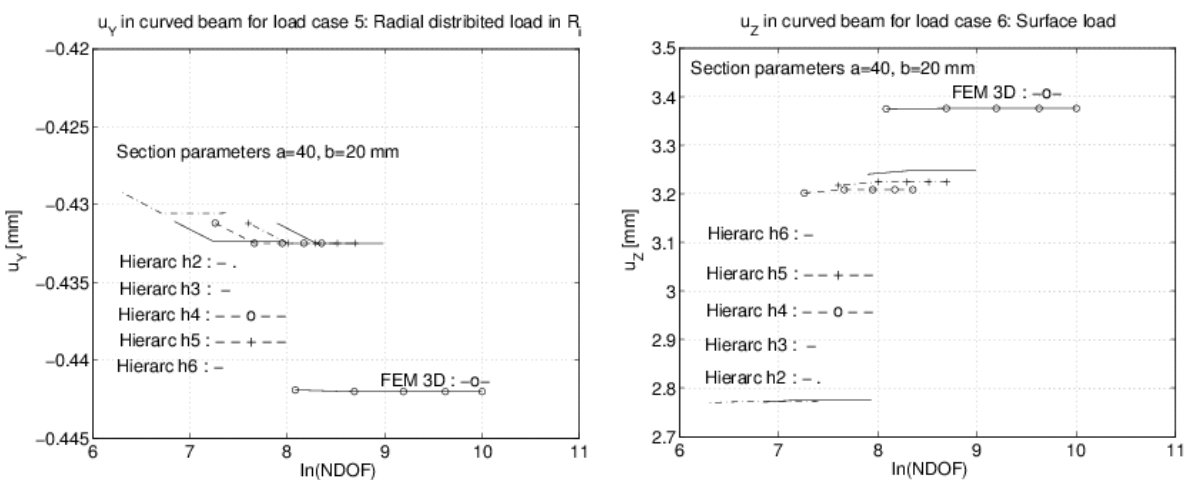
Terhelés jele	$F_x$ [N]	$F_z$ [N]	$M_z$ [Nmm]	$p_x$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$p_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]
1			5000		
2		200			
3	-100				
4					10 N/mm
5				-0.625	
6					0.25

A számításokat  $h2-h6$  modellekkel,  $p=2, \dots, 6$  -ad fokú polinomokkal jellemzett mezőfüggvényekkel dolgozó végelemekkel végeztük el. A különböző terheléseknél kapott konvergencia diagramokat a 2. ábra tartalmazza. Itt a Stress-Check végelem programmal [3] kapott 3D-s megoldás eredményei is fel vannak tüntetve  $p=4, \dots, 8$  fokú polinomok alkalmazása esetén. A diagramok jól mutatják, hogy a hierarchia szintjének növekedésével az elmozdulások nőnek (itt mindig az abszolút értékről beszélünk), de az is látszik, hogy azok a 3D-s megoldás alatt vannak mivel a 3D-s közelítés elmozdulásmezeje teljesebb, mint a hierarchikus rúdmodell közelített mezeje.

### Terhelés 1, 2



### Terhelés 5, 6



3. ábra Konvergencia diagramok 1,2,5,6 terheléshez tartozóan.

A fenti számítások mindegyik terhelésnél bizonyítják, hogy a hierarchiai szint emelésével konvergálunk a 3D-s megoldás felé. A 3D-s megoldáshoz viszonyítva az elmozdulások közötti eltérés kicsiny, kisebb, mint 5 %. Az egyes hierarchiai szinteken a  $p$  polinom fokszám emelése kicsiny mértékű változást nyújt a megoldásban.

Kiragadva a terhelések közül a *Terhelés 5*-öt, az alábbiakban néhány feszültségmegoszlást mutatunk be, kiemelve a dinamikai peremfeltételek kielégülésének mértékét.

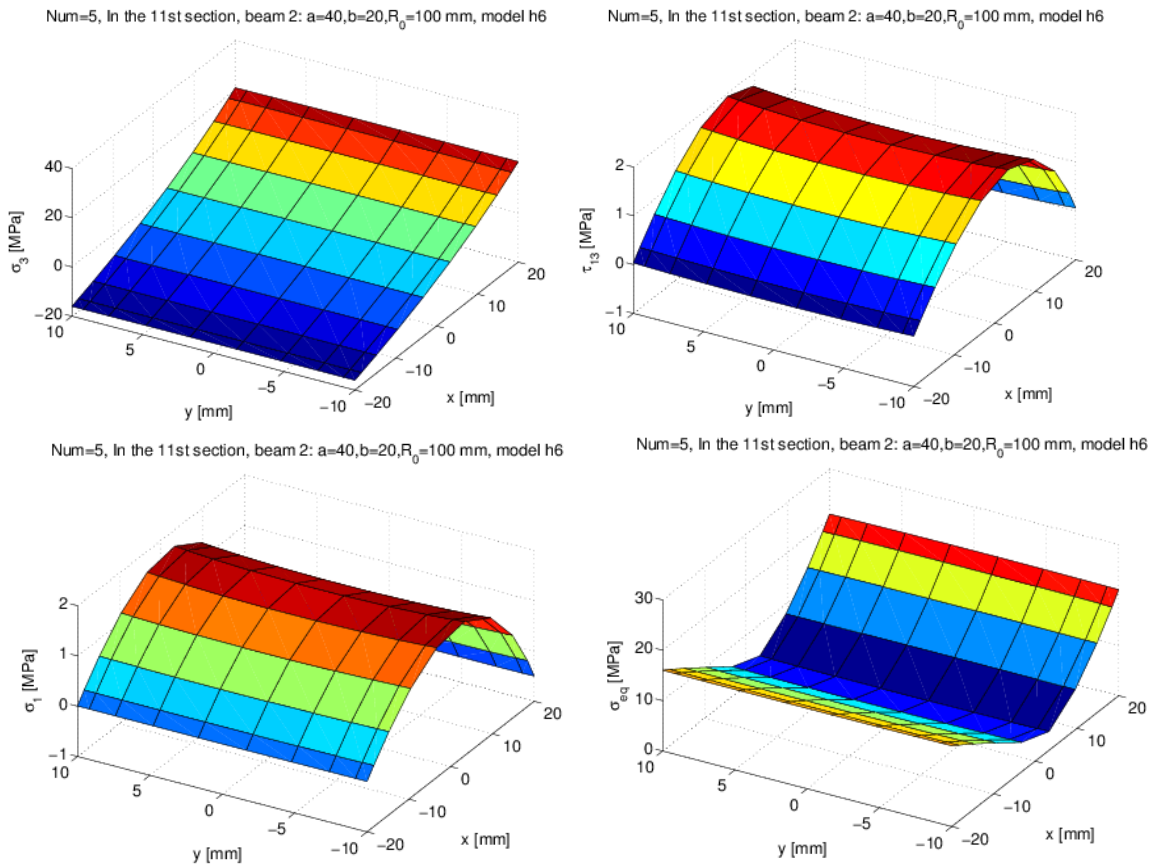
A  $\bar{\varphi}=3\pi/2$  metszeten néhány feszültség megoszlását a 4. ábra tünteti fel. Mínt hogy a  $\tau_{13}$  feszültség az  $x=20$  és  $x=-20$  peremeken zérus kell, hogy legyen, láthatóan ezt a *h6* modell teljesíti.

A  $\sigma_1$  vonatkozásában a *h6*-os modell kielégíti a  $\sigma_1=-0.625 \text{ MPa}$  peremfeltételt az  $x=20$  ( $R=80 \text{ mm}$  -es) hengeres paláston, ill. a  $\sigma_1=0$  feszültségmentesség is fennáll a külső hengeres paláston ( $x=-20, R=120 \text{ mm}$ ).

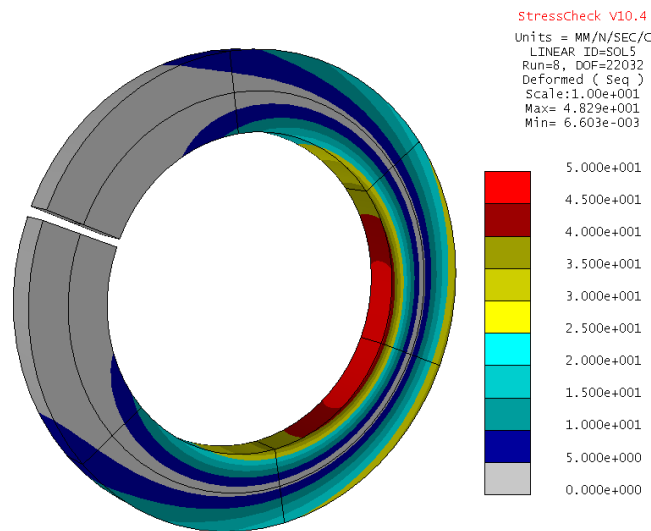
A redukált feszültség maximumát a  $\bar{\varphi}=2\pi$  metszetben kapjuk meg, aminek értéke 44,11 MPa, ez 3D-s megoldásnál 48,29 MPa, tehát az eltérés kisebb, mint 9%. Az 5. ábra a teljes modell felületén mutatja be a redukált feszültség megoszlását a 3D-s megoldásánál.

Természetesen az alsó hierarchikus modellek a dinamikai peremfeltételeket pontatlanul elégítik ki. Jó eredmények csak a *h3* feletti modellekkel érhetőek el a 3D-s ismeretlenszámmal képesti kisebb ismeretlenszámmal. Ennek ellenére az elvégzett számítások azt mutatják, hogy egy igényes 3D-s VEM program használata előnyösebb, mint a hierarchikus közelítésű program alkalmazása.

**Köszönetnyilvánítás** A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.



4. ábra  $\bar{\varphi} = 3\pi/2$  keresztmetszetben  $\sigma_3, \tau_{13}, \sigma_1, \sigma_{eq}$  feszültségek megoszlása.



5.  $\sigma_{eq}$  redukált feszültség megoszlása az 5. terhelésnél (3D-s modell)

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

1. Páczelt I. Szabó B., P-verziós végelemek felhasználó hierarchikus rúd modellek, pp. 341-344. Csibi Vencel-József; Barabás István (szerk.) OGÉT 2018: XXVI. Nemzetközi Gépészeti Konferencia: 26th International Conference on Mechanical Engineering, Cluj-Napoca, Románia, Kolozsvár, Románia Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság (EMT), (2018) 544 p.
2. Szabó B. and Babuska I., Introduction to Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
3. Stress-Check, <https://esrd.com>