



XIII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2019

Miskolc, 2019. augusztus 27-29.

HIERARCHIKUS P-VERZIÓS RÚD MODELLEK

Páczelt István¹, Szabó Barna²

¹ Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc-Egyetemváros
mechpacz@uni-miskolc.hu

² Washington University in St. Louis, USA
szabo@wustl.edu

Absztrakt: Hierarchikus modellekre jellemző, hogy az elmozdulásmezőt un. mezőfüggvények és irányfüggvények szorzatán keresztül közelítjük. Rúd modelleknél az irányfüggvények a keresztmetszetszabványos megoszlást írják le, míg a mezőfüggvények a hosszmenti változást. Irányfüggvények a Pascal háromszöghöz tartozó polinomok szerint változnak, a mezőfüggvények a p -verziós végelem technikával nyernek közelítést. Térbeli spirál középvonalú rudakra vezetjük le az összefüggéseket, ezekből a prizmatikus rudakra, ill. a sílbeli görbe rudakra nyerhetünk egyszerűbb összefüggéseket. A vizsgálatokat görbevonalú koordináta-rendszerben végezzük kis elmozdulást és alakváltozást feltételezve. A rúd anyaga lineárisan rugalmas. Az irányfüggvények választásától függően 6 féle hierarchikus modellhez jutunk, míg a mezőfüggvényeknél a p maximális értéke 6-ra van választva. A potenciális energia minimum elv alapján kerül levezetésre a modell merevségi mátrixa, redukált terhelési vektora, amelynek mérete függ a hierarchia szintjétől. Különböző terhelési eseteket felvéve, a numerikus példák eredményeit 3D-s végelem program eredményeivel hasonlítjuk össze konvergencia diagramokon és feszültség megoszlását bemutató ábrákon keresztül. A bemutatott modellek az eljárás konvergenciájáról tanuskodnak. Minél magasabb a hierarchia szintje, annál jobban közelítjük meg a térbeli feszültségállapotot.

Kulcsszavak: hierarchikus modellezés, végelem-módszer, rugalmasságtan

1. BEVEZETÉS

Antman híres átfogó cikkében [1] jó áttekintést ad a görbe rudak hierarchikus felépítéséről. Kisparaméterek szerinti sorbaféjtéssel halad a 3D-s állapotból az 1D-s klasszikus rúdmodellhez. Szigorú elméleti vizsgálatokon túl cikke azonban numerikus példákat nem tartalmaz.

[2]-ben a lemezekre és héjakra vonatkozó hierarchikus modellek sokoldalú elemzését találjuk mind statikai mind rezgéstani sajátérték meghatározását illetően. Külön elemzik, hogy a Kirchhoff-féle hipotézisre épülő modellek tekinthetők-e a hierarchikus modelleknek, a válasz nem. Vizsgálják a peremzavarás (boundary layer) hatását is. A téma bonyolult jellegét a több száz hivatkozás is hangsúlyozza.

Számos munka található egyenes középvonalú tartókra, statikai feladatokra, pl. [3,4,5,6,7], rezgéstani esetekre [8,9]. Változó anyagtulajdonságot a [10,11,12], míg geometriailag nemlineáris esetet a [13] vizsgál.

A jelen munka elsődleges célja, hogy a kontinuum feladat végelelemes vizsgálatával numerikus eredményeket is bemutasson. A jelen munka prizmatikus, síkgörbe rudakat és térbeli spirál középvonalú rudakat vizsgál feltételezve, hogy a rúd anyaga homogén, izotróp, lineárisan rugalmas, a terhelés kvázistatikus, az elmozdulások és alakváltozások kicsinyek, azaz a lineáris rugalmasságtan keretei között kerül sor a peremérték feladat megoldására.

A vizsgálatra a potenciális energia minimum elvre alapozott végelelemes közelítést választjuk, az elmozdulásmezőket az un. mezőfüggvények (field functions) és irányfüggvények (director functions) szorzatainak összegén keresztül közelítjük [14]. A vizsgálatokat görbevonalú koordináta-rendszerben végezzük el. A keresztmetszet síkjában a keresztmetszet súlypontján áthaladó, főtengek irányába mutató tengelyekre merőleges lesz a középvonal érintője. Ezen tengelyek által kijelölt lokális koordináta-rendszerben értelmezett elmozdulásokat és szögelfordulásokat a szokásos úton transzformáljuk a globális Descartes koordináta-rendszerbe. A középvonalhoz kapcsolt kísérő triédert a Serret-Frenet képletekkel állítjuk elő. Az irányfüggvények a Pascal háromszöghöz tartozó polinomok szerint változnak a keresztmetszetben, a mezőfüggvények (a test hossztengele mentén) p -verziójú végelem technikával nyernek közelítést [14]. Az irányfüggvények polinomjainak fokszámától függően különböző hierarchikus modellekhez jutunk, a kapott eredményeket a 3D-s modellel a StressCheck végelem programmal [15] vetjük össze. Rögzített irányfüggvényeknél a mezőfüggvényeknél felvett polinomok fokszámától függően vizsgálhatjuk a numerikus

közelítés konvergenciáját, míg a hierarchikus modellek egymásutániságából kapott eredmények szolgáltatnak további információt a tényleges 3D-s állapot megközelítésére.

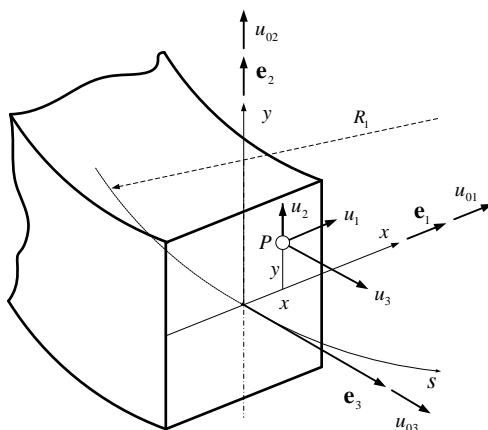
2. A MODELL FELEPÍTÉSE

Vizsgáljunk egy R_0 sugarú hengerfelületre rátekerített H menetemelkedésű csavarvonal középvonalú testet lineáris rugalmasságtani keretek között. A görbe test (rúd) középvonalának helyvektora [16]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{\varphi}) = R_0 (\cos(\bar{\varphi}) \mathbf{i} + \sin(\bar{\varphi}) \mathbf{j}) + \frac{H}{2\pi} \bar{\varphi} \mathbf{k} \quad (1)$$

ahol a $\bar{\varphi}$ - a hengerkoordináta-rendszer szöge. Jelölje s a középvonalon mért ívkoordinátát.

A Serret-Frenet-féle összefüggésekkel (lásd Appedix B) a spirálhuzal helyi koordinátarendszerének normális, binormális és érintő irányú $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ egységvektorai, a κ főgörbület és annak sugara R_1 , az egységnyi hosszra eső τ elcsavarodás egyszerű összefüggésekkel állíthatók elő. A triéder csúcspontjának elmozdulását a helyi koordinátarendszerben, $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ irányú független elmozdulás mezőkkel (u_{01}, u_{02}, u_{03}) , míg a szögelfordulását $\chi_i, i=1,2,3$ -al jellemezzük. A mechanikai állapotot az (x, y, s) görbevonallú koordinátarendszerben írjuk le. Az x és y tengelyek a keresztmetszet főtengeleyeivel esnek egybe. Itt x és y az \mathbf{n} és \mathbf{b} irányú koordinátákat jelöli, míg az s koordináta vonal \mathbf{t} irányában halad át (lásd 1. és 2. ábra).



1. ábra. Síkgörbe középvonalú görbe tartóhoz kötött görbevonallú koordinátarendszer és a benne értelmezett elmozdulások.

2.1 Elmozdulások

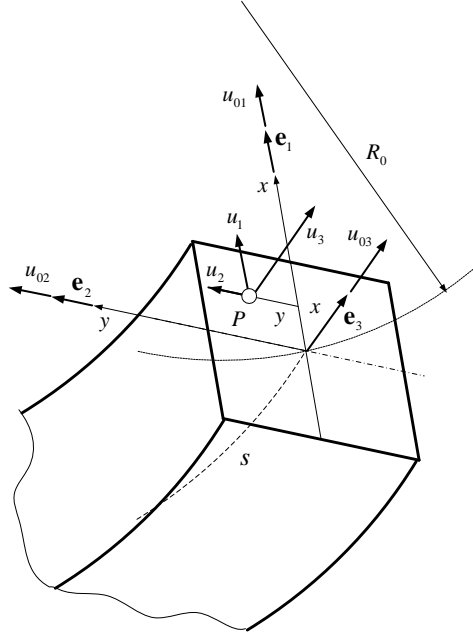
A test egy tetszőleges P pontjának elmozdulása (lásd 1. és 2. ábra)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b} + u_t \mathbf{t} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

amit

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = \sum_{m=1}^{MH} \mathbf{h}^{(m)}(x, y, s) \quad (3)$$

alakban fogunk közelíteni. Itt $\mathbf{h}^{(m)}(x, y, s)$ a választott hierarchikus modelltől függ, amiben szereplő függvényeket, a jól ismert Pascal háromszögből (lásd Appendix A) választjuk ki. Példaként álljon három függvény, amely az alábbi



2. ábra. Térgörbe középvonálú tartóhoz kötött görbevonalú koordinátarendszer és a benne értelmezett elmozdulások.

$$\mathbf{h}^{(1)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} u_{01} - y \chi_3 \\ u_{02} + x \chi_3 \\ u_{03} + y \chi_1 - x \chi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} xu_{1x} \\ yu_{2y} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}^{(1)0} + \mathbf{h}^{(1)1}, \quad \mathbf{h}^{(2)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} (x^2 u_{1x^2} + xy u_{1xy} + y^2 u_{1y^2}) \\ (x^2 u_{2x^2} + xy u_{2xy} + y^2 u_{2y^2}) \\ (x^2 u_{3x^2} + xy u_{3xy} + y^2 u_{3y^2}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}^{(3)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} (u_{1x^3} x^3 + u_{1x^2y} x^2 y + u_{1xy^2} xy^2 + u_{1y^3} y^3) \\ (u_{2x^3} x^3 + u_{2x^2y} x^2 y + u_{2xy^2} xy^2 + u_{2y^3} y^3) \\ (u_{3x^3} x^3 + u_{3x^2y} x^2 y + u_{3xy^2} xy^2 + u_{3y^3} y^3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Itt $u_{1x}, u_{2y}, u_{0i}, \chi_i; u_{ix^2}, u_{ixy}, u_{iy^2}; u_{ix^3}, u_{ix^2y}, u_{ixy^2}, u_{iy^3}, i=1,2,3$ un. mezőfüggvények, melyek az s függvényei, míg $1, x, y; x^2, xy, y^2; x^3, x^2y, xy^2, y^3$ az un. irányfüggvények.

Bevezetve az alábbi mátrixokat

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

az elmozdulás vektor tömören

$$\mathbf{u}(x, y, s) = \sum_{m=1}^3 \mathbf{h}^{(i)}(x, y, s) = \sum_{m=1}^3 \mathbf{F}_m(x, y) \tilde{\mathbf{h}}^{(m)}(s) \quad (6)$$

alakban írható fel $MH=3$ esetén.

A Modell-0 nál az $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s)$ közelítésénél csak a $\mathbf{h}^{(10)}(x, y, s)$ -et használjuk, a Modell 1-nél a teljes

$\mathbf{h}^{(1)}(x, y, s)$ -et, a Modell-2 nél a $\sum_{m=1}^2 \mathbf{h}^{(m)}(x, y, s)$ -et, míg a Modell-3 nál a sorbafejtésben 3 tagig megyünk el,

azaz $\sum_{m=1}^3 \mathbf{h}^{(m)}(x, y, s)$ tagokat vesszük figyelembe.

A mezőfüggvényekből ill. azok s szerinti deriváltjaikból az alábbi vektorokat fogjuk bevezetni:
Modell-0 nél

$$\Psi_0^T = \Psi_0^T(s) = [u_{01} \ u_{02} \ u_{03} \ \chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3 \ u'_{01} \ u'_{02} \ u'_{03} \ \chi'_1 \ \chi'_2 \ \chi'_3] \quad (7)$$

Modell-1 nél

$$\Psi_1^T = \Psi_1^T(s) = [\Psi_0^T \ \Psi^{h^{(1)T}}], \quad \Psi^{h^{(1)T}} = \Psi^{h^{(1)T}}(s) = [u_{1x}, u_{2y}, u'_{1x}, u'_{2y}] \quad (8)$$

Modell 2-nél

$$\begin{aligned} \Psi_2^T &= \Psi_2^T(s) = [\Psi_1^T \ \Psi^{h^{(2)T}}], \quad \Psi^{h^{(2)T}} = [\tilde{\mathbf{h}}^{(2)T} \ \tilde{\mathbf{h}}^{(2)T}] \\ \tilde{\mathbf{h}}^{h^{(2)T}} &= [u_{1x^2} \ u_{1xy} \ u_{1y^2} \ u_{2x^2} \ u_{2xy} \ u_{2y^2} \ u_{3x^2} \ u_{3xy} \ u_{3y^2}] \\ \tilde{\mathbf{h}}^{h^{(2)T}} &= [u'_{1x^2} \ u'_{1xy} \ u'_{1y^2} \ u'_{2x^2} \ u'_{2xy} \ u'_{2y^2} \ u'_{3x^2} \ u'_{3xy} \ u'_{3y^2}] \end{aligned} \quad (9)$$

Modell-3-nál

$$\begin{aligned} \Psi_3^T &= \Psi_3^T(s) = [\Psi_2^T \ \Psi^{h^{(2)T}} \ \Psi^{h^{(3)T}}], \quad \Psi_3^T = [\Psi_2^T \ \Psi^{h^{(3)T}}], \quad \Psi^{h^{(3)T}} = \Psi^{h^{(3)T}}(s) = [\tilde{\mathbf{h}}^{(3)T} \ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)T}] \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)T} &= [u_{1x^3} \ u_{1x^2y} \ u_{1xy^2} \ u_{1y^3} \ u_{2x^3} \ u_{2x^2y} \ u_{2xy^2} \ u_{2y^3} \ u_{3x^3} \ u_{3x^2y} \ u_{3xy^2} \ u_{3y^3}] \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)T} &= [u'_{1x^3} \ u'_{1x^2y} \ u'_{1xy^2} \ u'_{1y^3} \ u'_{2x^3} \ u'_{2x^2y} \ u'_{2xy^2} \ u'_{2y^3} \ u'_{3x^3} \ u'_{3x^2y} \ u'_{3xy^2} \ u'_{3y^3}] \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 Alakváltások

Az alakváltási tenzor kis alakváltáskor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, s) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \quad (11)$$

geometriai egyenleten keresztül számolható. Itt \otimes a diadikus szorzás jele.

A nábla operátor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{b} + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{t} \quad (12)$$

Az s irányú fajlagos nyúlás $\varepsilon_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3$, az x és y irányúak $\varepsilon_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1$, $\varepsilon_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2$, míg a szögtorzulások

$\frac{1}{2} \gamma_{13} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3$, $\frac{1}{2} \gamma_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3$, $\frac{1}{2} \gamma_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2$, amelyek esetünkben a számítások után az alábbi alakkal rendelkeznek

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{R_1}{R_1 - x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} - \frac{u_1}{R_1} \right) \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \gamma_{13} = \frac{R_1}{R_1 - x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \tau u_2 + \kappa u_3 \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \gamma_{23} = \frac{R_1}{R_1 - x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} + \tau u_1 \right) + \frac{\partial u_3}{\partial y}\end{aligned}\quad (13)$$

2.3 Feszültségek

A feszültségi tenzor független 6 eleméből az alábbi (6,1) méretű feszültségvektort lehet összeállítani

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

ahol \mathbf{D} az anyagállandók mátrixa.

2.3.1 *Modell-0-nál* ez egyszerűsödik a klasszikus rúdelméletek szerint, azaz

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_3 \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}], \quad \boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_3 \ \tau_{13} \ \tau_{23}], \quad (15)$$

$$\mathbf{D} = \langle E \ G \ G \rangle \quad (16)$$

ahol E - a Young modulus, G - a csúsztató rugalmassági tényező.

2.3.2 *Modell-1,2,3-nál*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}], \quad \boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{23}] \quad (17)$$

mivel térbeli feszültségállapotot tételezünk fel. Itt \mathbf{D} a 3D-s állapotához tartozó (6x6) os anyagállandó mátrixot jelenti [14, 17].

2.4 Potenciális energia

A teljes potenciális energia [3]

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \iint \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dS ds - W^{work} \quad (18)$$

Itt W^{work} a külső terhelés munkája. Könnyen belátható, hogy a (11) alatti alakváltozások és a (14-16) alatti feszültségek számítása alapján, pl. a *Modell-0* nál, az alakváltozási vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\Psi}_0, \quad (19)$$

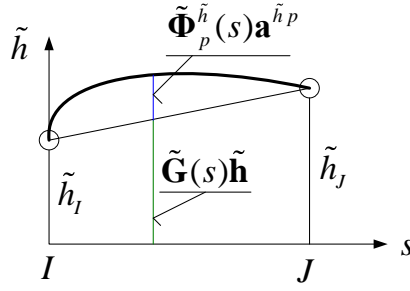
alakban képezhető, ahol $\boldsymbol{\Gamma}_0$ az irányfüggvényektől függő mátrix (itt ezt nem közöljük). A (18)-ban szereplő alakváltozási energiának a keresztmetszet szerinti integrálással nyert mátrixa

$$\tilde{\mathbf{D}}_0 = \int_S \boldsymbol{\Gamma}_0^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma}_0 dS, \quad (20)$$

amivel a teljes potenciális energia

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_L \{ \boldsymbol{\Psi}_0^T \tilde{\mathbf{D}}_0 \boldsymbol{\Psi}_0 \} ds - W^{work} \quad (21)$$

Vagyis a (21)-ben most már csak a $\boldsymbol{\psi}_0$ -ben szereplő irány függvények s szerinti közelítésére lesz szükség, vagyis a feladatot egyváltozós feladatra vezettük vissza.



3. ábra. Mezőfüggvények végeelemen belüli közelítése.

A 3. ábra szerint egy tetszőleges \tilde{h} függvény az s mentén két részből tevődik össze. Egyik része a csomóponti értékeken keresztül –lineáris függvényként–, a másik része csak az elemen belül ható magasabbfokú polinomokon keresztül. Ismeretlenként a \tilde{h}_I , \tilde{h}_J csomóponti értékek és az $\mathbf{a}^{\tilde{h},p}$ vektorban szereplő ún. pótlólagos állandók fognak szerepelni.

Bevezetve a globális rendszerben értelmezett I és J csomóponti elmozdulások vektorát

$$\mathbf{q}_I^{G,T} = [u_{0x} \quad u_{0y} \quad u_{0z} \quad \chi_x \quad \chi_y \quad \chi_z]_I, \quad I \rightarrow J, \quad \mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_I^G \quad \mathbf{q}_J^G]^T \quad (22)$$

a helyi rendszerben értelmezett

$$\mathbf{u}_0^{L,T} = [u_{01} \quad u_{02} \quad u_{03}], \quad \boldsymbol{\chi}^{L,T} = [\chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_3] \quad (23)$$

vektorokat, formálisan a középvonal elmozdulása, szögelfordulása és ezek s szerinti deriváltjai

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}^L = \mathbf{G}_{u\chi} \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_{u\chi,p} \mathbf{a}^{u\chi,p}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\chi}} \end{bmatrix}^L = \mathbf{G}'_{u\chi} \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}'_{u\chi,p} \mathbf{a}^{u\chi,p} \quad (24)$$

alakban nyernek közelítést, ahol $\mathbf{G}_{u\chi}$ a merevtestszerű és a rugalmas elmozdulásokat lineárisan közelítő mátrix [16], (lásd Appendix B), $\boldsymbol{\Phi}_{u\chi,p}$ a p fokszámától függő polinomokat tartalmazó mátrix, $\mathbf{a}^{u\chi,p}$ a pótlólagos állandók vektora. A (7) alatti $\boldsymbol{\psi}_0$ vektor a (24) alattiak figyelembevételével

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{G}^0 \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_p^0 \mathbf{a}^{0p}, \quad \mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{u\chi} \\ \mathbf{G}'_{u\chi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_p^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{u\chi,p} \\ \boldsymbol{\Phi}'_{u\chi,p} \end{bmatrix} \quad (25)$$

alakú közelítéssel írható le tömören. Természetesen a magasabb hierarchikus modellek is formálisan a (25) alakú közelítéssel rendelkeznek. (25)-nak (21)-be való helyettesítéssel a végeelemes számítás merevségi mátrixa már könnyen előállítható [17].

Kissé részletezve,

$$\boldsymbol{\Phi}_{u\chi,p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{0p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{0p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{up} \\ \boldsymbol{\Phi}_{zp} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}'_{u\chi,p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}'_{0p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}'_{0p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}'_{up} \\ \boldsymbol{\Phi}'_{zp} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$\bar{s} = s / L$, ahol L az elem középvonalának hossza. Az s szerinti derivált $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{ds} = \frac{1}{L} \frac{d(\cdot)}{d\bar{s}}$ alapján számolható.

Itt

$$\Phi_{0p} = \begin{bmatrix} \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$\Phi'_{0p} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2\bar{s} - 1 & 3\bar{s}^2 - 1 & \dots & p\bar{s}^{p-1} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{s} - 1 & 3\bar{s}^2 - 1 & \dots & p\bar{s}^{p-1} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{s} - 1 & 3\bar{s}^2 - 1 & \dots & p\bar{s}^{p-1} - 1 \end{bmatrix} \quad (27b)$$

$$\mathbf{a}^{0p,T} = [\mathbf{a}_u^{p,T} \ \mathbf{a}_\chi^{p,T}] \quad (28)$$

$$\mathbf{a}_u^{p,T} = [a_{u1}^{p=2} \ a_{u1}^{p=3}, \dots, a_{u1}^p \ a_{u2}^{p=2} \ a_{u2}^{p=3}, \dots, a_{u2}^p \ a_{u3}^{p=2} \ a_{u3}^{p=3}, \dots, a_{u3}^p]$$

$$\mathbf{a}_\chi^{p,T} = [a_{\chi1}^{p=2} \ a_{\chi1}^{p=3}, \dots, a_{\chi1}^p \ a_{\chi2}^{p=2} \ a_{\chi2}^{p=3}, \dots, a_{\chi2}^p \ a_{\chi3}^{p=2} \ a_{\chi3}^{p=3}, \dots, a_{\chi3}^p].$$

Most nézzük meg a Modell-1-et.

Az alakváltozási vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = [\Gamma_{1(0)} \ \Gamma_{1(1)}] \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi^{h(1)} \end{bmatrix} = \Gamma_1 \Psi_1 \quad (29)$$

Ekkor a (8) értelmében a Ψ_1 -ben 16 függvényt kell közelíteni

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi^{h(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \tilde{\mathbf{h}}^{h(1)} \\ \tilde{\mathbf{h}}^{h(1),y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{h(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{h(1),y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^{h(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_p^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_p^{h(1)} \\ \mathbf{0} & \Phi_p^{h(1),y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{0p} \\ \mathbf{a}^{h(1)p} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1^{total} \mathbf{q}^1 + \Phi_{1p}^{total} \mathbf{a}^{1p} \quad (30)$$

ahol

$$\mathbf{G}^{h(1)} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{s} & 0 & \bar{s} & 0 \\ 0 & 1 - \bar{s} & 0 & \bar{s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{h(1),y} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\Phi_p^{h(1)} = \begin{bmatrix} \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} \end{bmatrix}, \quad (32a)$$

$$\Phi_p^{h(1),y} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2\bar{s} - 1 & 3\bar{s}^2 - 1 & \dots & p\bar{s}^{p-1} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{s} - 1 & 3\bar{s}^2 - 1 & \dots & p\bar{s}^{p-1} - 1 \end{bmatrix}, \quad (32b)$$

$$\mathbf{q}^{1T} = [\mathbf{q}_I^T, \mathbf{q}_J^T, \mathbf{q}_I^{h(1)T}, \mathbf{q}_J^{h(1)T}]^T, \quad \mathbf{q}_I^{h(1)T} = [u_{1x} \ u_{2y}]_I, \quad I \rightarrow J, \quad \mathbf{a}^{h(1)pT} = [a_{1x}^{p=2}, a_{1x}^{p=3}, \dots, a_{1x}^p; a_{2y}^{p=2}, a_{2y}^{p=3}, \dots, a_{2y}^p] \quad (33)$$

Most nézzük meg a Modell-2-t.

Ekkor (9) értelmében a Ψ_2 -ben 16+18 függvényt kell közelíteni. Tehát a (30) alatti Ψ_1 -et ki kell bővíteni. Vagyis

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_{h^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi^{h^{(2)}} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_2 \Psi_2 \quad (34)$$

továbbá

$$\tilde{\mathbf{h}}_i^{(2)} = \begin{bmatrix} u_{ix^2} \\ u_{ixy} \\ u_{iy^2} \end{bmatrix}, i=1,2,3, \quad \tilde{\mathbf{h}}^{(2)T} = [\tilde{\mathbf{h}}_1^{(2)T} \tilde{\mathbf{h}}_2^{(2)T} \tilde{\mathbf{h}}_3^{(2)T}], \quad \Psi^{h^{(2)T}} = [\tilde{\mathbf{h}}^{(2)T} \tilde{\mathbf{h}}^{(2)'T}], \quad (35)$$

vagyis a (30) alatti \mathbf{G}_1^{total} felhasználásával, tömörebb jelöléssel $\mathbf{G}^1 = \mathbf{G}_1^{total}$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi^{h^{(2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \tilde{\mathbf{h}}_1^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{h}}_2^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{h}}_3^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{h}}_1^{(2)'} \\ \tilde{\mathbf{h}}_2^{(2)'} \\ \tilde{\mathbf{h}}_3^{(2)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \tilde{\mathbf{h}}^{h^{(2)}} \\ \tilde{\mathbf{h}}^{h^{(2)'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{h^{(2)}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{h^{(2)'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^{h^{(2)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_p^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_p^{h^{(2)}} \\ \mathbf{0} & \Phi_p^{h^{(2)'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{1p} \\ \mathbf{a}^{h^{(2)}p} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2^{total} \mathbf{q}^2 + \Phi_{2p}^{total} \mathbf{a}^{2p} \quad (36)$$

ahol

$$\mathbf{G}^{h^{(2)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{h^{(2)1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{h^{(2)2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{h^{(2)1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{h^{(2)2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{h^{(2)1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{h^{(2)2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{h^{(2)'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}'_{h^{(2)1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}'_{h^{(2)2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}'_{h^{(2)1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}'_{h^{(2)2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}'_{h^{(2)1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}'_{h^{(2)2}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{G}_{01} = \mathbf{G}_{h^{(2)1}} = \begin{bmatrix} 1-\bar{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1-\bar{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1-\bar{s} \end{bmatrix} = (1-\bar{s})\mathbf{E}_{(3,3)}, \quad \mathbf{G}_{02} = \mathbf{G}_{h^{(2)2}} = \begin{bmatrix} \bar{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{s} \end{bmatrix} = \bar{s}\mathbf{E}_{(3,3)}, \quad (38a)$$

$$\mathbf{G}'_{01} = \mathbf{G}'_{h^{(2)1}} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{L}\mathbf{E}_{(3,3)}, \quad \mathbf{G}'_{02} = \mathbf{G}'_{h^{(2)2}} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\mathbf{E}_{(3,3)} \quad (38b)$$

$$\Phi_p^{h^{(2)}} = \begin{bmatrix} \Phi_{0p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{0p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{0p} \end{bmatrix}, \quad \Phi_p^{h^{(2)'}} = \begin{bmatrix} \Phi'_{0p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi'_{0p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi'_{0p} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

$$\mathbf{q}^{2T} = \left[\mathbf{q}_I^{1T}, \mathbf{q}_J^{1T}, \mathbf{q}_I^{h^{(2)T}}, \mathbf{q}_J^{h^{(2)T}} \right] \quad (40)$$

$$\mathbf{q}_I^{h^{(2)T}} = \left[\left[u_{1x^2} \ u_{2xy} \ u_{3y^2} \right]_I \left[u_{2x^2} \ u_{2xy} \ u_{2y^2} \right]_I \left[u_{3x^2} \ u_{3xy} \ u_{3y^2} \right]_I \right], \quad I \rightarrow J$$

$$\mathbf{a}^{h^{(2)pT}} = \left[\mathbf{a}_1^{h^{(2)pT}}, \mathbf{a}_2^{h^{(2)pT}}, \mathbf{a}_3^{h^{(2)pT}} \right] \quad (41)$$

$$\mathbf{a}_i^{h^{(2)pT}} = \left[a_{ix^2}^{p=2}, a_{ix^2}^{p=3}, \dots, a_{ix^2}^p; a_{ixy}^{p=2}, a_{ixy}^{p=3}, \dots, a_{ixy}^p; a_{iy^2}^{p=2}, a_{iy^2}^{p=3}, \dots, a_{iy^2}^p \right]$$

A magasabb hierarchikus modelleknél állnak

$$\mathbf{G}_{h^{(m)1}} = (1-\bar{s})\mathbf{E}_{(m+1,m+1)}, \quad \mathbf{G}_{h^{(m)2}} = \bar{s}\mathbf{E}_{(m+1,m+1)}, \quad \mathbf{G}'_{h^{(m)1}} = \frac{-1}{L}\mathbf{E}_{(m+1,m+1)}, \quad \mathbf{G}'_{h^{(m)2}} = \frac{1}{L}\mathbf{E}_{(m+1,m+1)}, \quad m=3,4,5,6 \quad (42a)$$

Itt $\mathbf{E}_{(m+1,m+1)}$ ($m+1, m+1$) méretű egységmátrix.

$$\mathbf{G}^{h^{(m)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{h^{(m)1}} & 0 & 0 & \mathbf{G}_{h^{(m)2}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{h^{(m)1}} & 0 & 0 & \mathbf{G}_{h^{(m)2}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{h^{(m)1}} & 0 & 0 & \mathbf{G}_{h^{(m)2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{h^{(m)'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}'_{h^{(m)1}} & 0 & 0 & \mathbf{G}'_{h^{(m)2}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}'_{h^{(m)1}} & 0 & 0 & \mathbf{G}'_{h^{(m)2}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}'_{h^{(m)1}} & 0 & 0 & \mathbf{G}'_{h^{(m)2}} \end{bmatrix} \quad (42b)$$

továbbá

$$\mathbf{\Phi}_{h^{(m)p}}^{(m+1),(m+1)(p-1)} = \left[\mathbf{\Phi}_{h^{(m)p(1)}}^{h^{(m)}} \quad \mathbf{\Phi}_{h^{(m)p(2)}}^{h^{(m)}} \right], \quad \mathbf{\Phi}'_{h^{(m)p}}^{(m+1),(m+1)(p-1)} = \left[\mathbf{\Phi}'_{h^{(m)p(1)}}^{h^{(m)}} \quad \mathbf{\Phi}'_{h^{(m)p(2)}}^{h^{(m)}} \right] \quad (43)$$

$$\mathbf{\Phi}_p^{h^{(m)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{h^{(m)p}}^{h^{(m)}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{h^{(m)p}}^{h^{(m)}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{h^{(m)p}}^{h^{(m)}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}'_p^{h^{(m)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}'_{h^{(m)p}}^{h^{(m)}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}'_{h^{(m)p}}^{h^{(m)}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}'_{h^{(m)p}}^{h^{(m)}} \end{bmatrix}, \quad m=3,4,5,6 \quad (44)$$

illetve

$$\tilde{\mathbf{D}}_m = \int_S \mathbf{\Gamma}_m^T \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}_m dS, \quad \Pi_p = \frac{1}{2} \int_L \left\{ \boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{D}}_m \boldsymbol{\Psi}_m \right\} ds - W^{work}, \quad \text{ahol } m=1,2,3,4,5,6 \quad (45)$$

Tekintettel a (34)-(45) alattiakra a $h6$ -os modellnél

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{\Gamma}_1 \quad \mathbf{\Gamma}_{h^{(2)}} \quad \mathbf{\Gamma}_{h^{(3)}} \quad \mathbf{\Gamma}_{h^{(4)}} \quad \mathbf{\Gamma}_{h^{(5)}} \quad \mathbf{\Gamma}_{h^{(6)}} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_{h^{(2)}} \\ \boldsymbol{\Psi}_{h^{(3)}} \\ \boldsymbol{\Psi}_{h^{(4)}} \\ \boldsymbol{\Psi}_{h^{(5)}} \\ \boldsymbol{\Psi}_{h^{(6)}} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_6 \boldsymbol{\Psi}_6 \quad (46)$$

A $\mathbf{\Gamma}_6$ mátrix elemeit az Appendix C-ben találjuk meg.

A \mathbf{G}_6^{total} és $\mathbf{\Phi}_6^{total}$ mátrixoknál visszafelé haladva, letörölve az utolsó blokk oszlopot és az utolsó két blokksort, egyel csökkentett számú modellhez tartozó mátrixhoz jutunk el. A fenti gondolatmenetet kiterjesztve a többi modellre is, a modellek főbb jellemzőit az 1. Táblázatban találjuk meg.

$$\mathbf{G}_6^{total} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^{h(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^{h(2)'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(3)'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(4)'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(5)'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}^{h(6)'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_6^{total} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Phi}^{h(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Phi}^{h(2)'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(3)'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(4)'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(5)'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Phi}^{h(6)'} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Itimo: Szám. Programon belül	Hierarchikus modell jele	Csomópontbeli ismeretlenek száma NDOF	Belső csomópontok száma	Elem csomópontjainak száma	AD=Belső ismeretlenek száma	ND=elem szabadságfoka
21	h0	6	6	8	6(p-1)	12+AD
22	h1	8	8	10	8(p-1)	16+AD
23	h2	17	17	19	17(p-1)	34+AD
24	h3	29	29	31	29(p-1)	58+AD
25	h4	44	44	46	44(p-1)	88+AD
26	h5	62	62	64	62(p-1)	124+AD
27	h6	83	83	85	83(p-1)	166+AD

1. táblázat: A hierarchikus végelemek főbb jellemzői

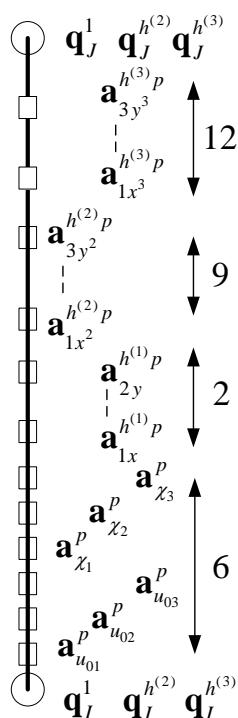
Az 1. táblázat szerint a $h3$ -as modellhez tartozó végelemet az 4. ábrán szemléltetjük. A \mathbf{q}_I az I csomópont globális rendszerbeli elmozdulásának és szögelfordulásának vektora, $\mathbf{q}_I^{h(m)}$ a hm -modellhez tartozó irányfüggvények szorzófaktorai (I csomópontbeli értékei), a többi pedig a pótlólagos állandók alkotta belső csomópontokba „elhelyezett” értékei. Látjuk, hogy a $h2$ modellnél csomópontként 17, belső pontok száma úgyszintén 17. A $h3$ -as modellnél ehhez még hozzájön 12, vagyis az a csomóponti ismeretlenek száma 29, míg a belső ismeretlenek száma a választott p fokszámától függően $(8+9+12)(p-1)=29(p-1)$. Az elem teljes szabadságfoka $ND=29(p+1)$. Itt minden függvényt azonos fokú polinommal közelítünk! Általánosan a

$$\boldsymbol{\Psi}_m = \mathbf{G}_m^{total} \mathbf{q}^m + \mathbf{\Phi}_{mp}^{total} \mathbf{a}^{mp} \quad (48)$$

és így a potenciális energia $\mathbf{q} = \mathbf{q}^m$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{mp}$, $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}_m = \int_S \boldsymbol{\Gamma}_m^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma}_m dS$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m^{total}$, $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_{mp}^{total}$

jelölésekkel

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_L \{ (\mathbf{q}^T \mathbf{G}^T + \mathbf{a}^T \Phi^T) \tilde{\mathbf{D}} (\mathbf{G}\mathbf{q} + \Phi\mathbf{a}) \} ds - W^{work} = U - W^{work} \quad (49)$$



4. ábra. A $h3$ -as modellhez tartozó végelem külső és belső csomópontjaihoz kötődő ismeretlenjei.

amiből a merevségi mátrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{qq} & \mathbf{K}_{qa} \\ \mathbf{K}_{aq} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{qq} = \int_L \{ \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{G} \} ds, \quad (50a)$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \int_L \{ \Phi^T \tilde{\mathbf{D}} \Phi \} ds, \quad \mathbf{K}_{qa} = \int_L \{ \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{D}} \Phi \} ds = \mathbf{K}_{aq}^T, \quad (50b)$$

A redukált terhelési vektor formálisan $\mathbf{f}^T = [\mathbf{f}_q^T \mathbf{f}_a^T]$ alakban írható fel.

Végezetül a pótlólagos állandók eliminálásával, a redukált merevségi mátrix és terhelési vektor az alábbi:

$$\mathbf{K}_{red} = \mathbf{K}_{qq} - \mathbf{K}_{qa} (\mathbf{K}_{aa})^{-1} \mathbf{K}_{aq}, \quad \mathbf{f}_{red} = \mathbf{f}_q - \mathbf{K}_{qa} (\mathbf{K}_{aa})^{-1} \mathbf{f}_a \quad (51)$$

Későbbiekben a végső nagy egyenletrendszer megoldása után az elemre vonatkozó pótlólagos állandók

$$\mathbf{a} = (\mathbf{K}_{aa})^{-1} \mathbf{f}_a - (\mathbf{K}_{aa})^{-1} \mathbf{K}_{aq} \mathbf{q} \quad (52)$$

összefüggéssel számolhatók.

2.5 Terhelési vektorok

1. $h0$ -nál lényegében a középvonalon értelmezett közelítendő elmozdulásmező miatt eredő erőkkel és nyomatékokkal, ill. középvonalon megoszló terheléssel (erő, nyomatékpár) dolgozhatunk.
2. $h1, h2, h3, \dots$ modelleknél a $\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}, \mathbf{h}^{(3)}, \dots$ függvények miatt a felületen megoszló terhelések munkáját az alábbi megfontolások alapján tudjuk számolni.

A gondolatmenetet a $h3$ -as modellre mutatjuk be. A közelített elmozdulásmező ennél a modellnél a (6) alapján számolható.

Kigyűjtve az s -től függő függvényeket, írhatjuk, hogy

$$\Psi_3^{displ} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0(s) \\ \chi(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(1)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(2)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^{(1)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(2)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{red}^3 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^{(1)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(1)'}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(2)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(2)'}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)}(s) \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(3)'}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{red}^3 \Psi_3 \quad (53)$$

ahol

$$\mathbf{R}_{red,(29,58)}^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3,3} & \mathbf{O}_{3,3} & \mathbf{O}_{3,3} & \mathbf{O}_{3,3} & \mathbf{O}_{3,2} & \mathbf{O}_{3,2} & \mathbf{O}_{3,9} & \mathbf{O}_{3,9} & \mathbf{O}_{3,12} & \mathbf{O}_{3,12} \\ & & \mathbf{E}_{3,3} & \mathbf{O}_{3,3} & \mathbf{O}_{3,2} & \mathbf{O}_{3,2} & \mathbf{O}_{3,9} & \mathbf{O}_{3,9} & \mathbf{O}_{3,12} & \mathbf{O}_{3,12} \\ & & & & \mathbf{E}_{2,2} & \mathbf{O}_{2,2} & \mathbf{O}_{2,9} & \mathbf{O}_{2,9} & \mathbf{O}_{2,12} & \mathbf{O}_{2,12} \\ & & & & & & \mathbf{E}_{9,9} & \mathbf{O}_{9,9} & \mathbf{O}_{9,12} & \mathbf{O}_{9,12} \\ & & & & & & & & \mathbf{E}_{12,12} & \mathbf{O}_{12,12} \end{bmatrix} \quad (54)$$

A (6) alatti elmozdulásvektor (53), (54) figyelembevételével egy tetszőleges pontban

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_3] \Psi_3^{displ} = \mathbf{U}^3(x, y) \Psi_3^{displ}(s) = \mathbf{U}^3(x, y) \mathbf{R}_{red}^3 \Psi_3(s) \quad (55)$$

továbbá (48)-ra való tekintettel

$$\Psi_3(s) = \mathbf{G}^{total}(s) \mathbf{q}^{total} + \Phi^{total}(s) \mathbf{a}^{total} \quad (56)$$

és így az S_{load} felületen ható terhelés munkája

$$W^{work} = \int_{S_{load}} \left(\mathbf{q}^{total,T} \mathbf{G}^{total,T}(s) + \mathbf{a}^{total,T} \Phi^{total,T}(s) \right) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \mathbf{U}^{3,T}(x, y) \mathbf{p}_{load}(x, y, s) dS \quad (57)$$

amiből már a redukált terhelési vektorok könnyen számolhatók.

Ha a terhelés csak az x, y függvénye (a terhelés a rúd végső keresztmetszeteiben hat, (I , vagy J jelű)), pl. a vizsgált test keresztmetszete téglalap, a, b méretekkel x és y irányban, akkor a megoszló terhelés egy lehetséges alakja

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \tau_{13}^0 \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^2 \right) \\ \tau_{23}^0 \left(1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 \right) \\ \sigma^0 - \frac{\sigma^+}{b/2} y \end{bmatrix} \quad (58)$$

ahol τ_{13}^0 , τ_{23}^0 , σ^0 , σ^+ adottak és ekkor a terhelés munkája

$$W^{work} = \left(\mathbf{q}^{total,T} \mathbf{G}^{total,T}(s_{I(J)}) + \mathbf{a}^{total,T} \mathbf{\Phi}^{total,T}(s_{I(J)}) \right) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \int_{S_{I(J)}} \mathbf{U}^{3,T}(x, y) \mathbf{p}_{load}(x, y) dS_{xy} \quad (59)$$

a redukált terhelési vektorok pedig

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_q &= \left(\mathbf{G}^{total,T}(s_{I(J)}) \right) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \int_{S_{I(J)}} \mathbf{U}^{3,T}(x, y) \mathbf{p}_{load}(x, y) dS_{xy} \\ \mathbf{f}_a &= \left(\mathbf{\Phi}^{total,T}(s_{I(J)}) \right) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \int_{S_{I(J)}} \mathbf{U}^{3,T}(x, y) \mathbf{p}_{load}(x, y) dS_{xy} \end{aligned} \quad (60)$$

Ha a terhelés a paláston, pl az \mathbf{n} -re merőleges $x = -a/2$ koordinátájú felületen hat, akkor

$$W^{work} = \int_{S_{load}} \left(\mathbf{q}^{total,T} \mathbf{G}^{total,T}(s) + \mathbf{a}^{total,T} \mathbf{\Phi}^{total,T}(s) \right) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \mathbf{U}^{3,T}(x = -a/2, y) \mathbf{p}_{load}(x, y, s) dS_{ys} \quad (61)$$

Ha a terhelés a binormálisra merőleges felületen hat, pl. $y = -b/2$ helyen, akkor

$$W^{work} = \int_{S_{load}} \left(\mathbf{q}^{total,T} \mathbf{G}^{total,T}(s) + \mathbf{a}^{total,T} \mathbf{\Phi}^{total,T}(s) \right) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \mathbf{U}^{3,T}(x, y = -b/2) \mathbf{p}_{load}(x, y, s) dS_{xs} \quad (62)$$

A többi hierarchikus modellnél is hasonlóan járhatunk el.

2.6 Rugalmas közeggel való megtámasztás

Tételezzük fel, hogy az $y = b/2$ felületen a gyűrűalakú test c rugóállandóval jellemzett Winkler típusú közeggel érintkezik. Ekkor a rugalmas közegben

$$U^{rug} = \frac{1}{2} \int_{S_{rug}} u_y(x, y = b/2, s) c u_y(x, y = b/2, s) dS_{xs} \quad (63)$$

alakváltozási energia alakul ki, tehát tekintettel az $\mathbf{u}(x, y, s)$ (55) alatti közelítésére

$$\begin{aligned} u_y &= \mathbf{u}(x, y, s)^T \mathbf{e}_2 = \left(\mathbf{u}(x, y, s)^T \mathbf{e}_2 \right)^T = \mathbf{e}_2^T \mathbf{u}(x, y, s) = \mathbf{u}(x, y, s)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 0] \mathbf{u}(x, y, s) = \\ & \mathbf{\Psi}_3^T(s) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \mathbf{U}^{3,T}(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 0] \mathbf{U}^3(x, y) \mathbf{R}_{red}^3 \mathbf{\Psi}_3(s) \end{aligned} \quad (64)$$

vagyis

$$U^{rug} = \frac{1}{2} \int_{S_{rug}} \mathbf{\Psi}_3^T(s) \mathbf{R}_{red}^{3,T} \mathbf{U}^{3,T}(x, y = b/2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^3(x, y = b/2) \mathbf{R}_{red}^3 \mathbf{\Psi}_3(s) dS_{xs} \quad (65)$$

Az (56) alatti $\mathbf{\Psi}_3$ behelyettesítésével (a total indexbeli jelet elhagyva), az integrálások elvégzésével az

$$U^{rug} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \mathbf{a}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{qq} & \mathbf{C}_{qa} \\ \mathbf{C}_{aq} & \mathbf{C}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (66)$$

ahol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{qq} & \mathbf{C}_{qa} \\ \mathbf{C}_{aq} & \mathbf{C}_{aa} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{qq} = \int_{S_{xs}} \{ \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G} \} dS_{xs}, \quad \mathbf{C}_{aa} = \int_{S_{xs}} \{ \mathbf{\Phi}^T \mathbf{W} \mathbf{\Phi} \} dS_{xs},$$

$$\mathbf{C}_{qa} = \int_{S_{xs}} \{ \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{\Phi} \} dS_{xs} = \mathbf{C}_{aq}^T,$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(x, y = b/2) = \mathbf{R}_{red}^{3,T} \mathbf{U}^{3,T}(x, y = b/2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^3(x, y = b/2) \mathbf{R}_{red}^3$$

3. SZÁMPÉLDÁK

A fenti (1) leírásban, ha $H=0$, síkbeli állandó sugarú görbe rúdhoz, továbbá, ha $R_0=0$ és $R_1=\infty$, akkor egyes középvonalú testhez jutunk. Az előadás ezekből mutat be néhány példát a véglapon, ill. a hosszmentén ható megoszló terheléseknél, elemezve a hierarchia magasabb rúdmodelljeinek hatását a közelítés mikéntjére.

3.1 Prizmatikus rúd esete

Prizmatikus tartó geometriai méretei $a=40$, $b=20$, $L=157.079633$ mm ($200\pi/4 = 50\pi$), míg az anyagállandók: Rugalmassági modulus $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, Poisson szám $\nu = 0.3$.

Terhelés jele	F_x [N]	F_y [N]	M_z [Nmm]	$p_x = -p_x$ [N/mm ²]	$p_y = -p_y$ [N/mm ²]
1			1000		
2		-200			
3	100				
4					10 N/mm
5				0.5	
6					0.25

2. táblázat: Prizmatikus tartó terhelése

Az 1. terhelésnél M_z csavarónyomaték hat a $Z=0$ sík súlypontjában. A Saint-Venant elv értelmében ettől a síktól elegendő távolságra a kialakult csúsztató feszültségek síkról-síkra kismértékben fognak csak változni (elvileg azonosak kellene lenniük).

A 2. terhelésnél F_y eredőjű erő parabolikus megoszlással a $Z=0$ síkban hat $-Y$ irányában.

A 3. terhelésnél F_x koncentrált erő a $Z=0$ síkban hat X irányában, ill. parabolikus megoszlással.

A 4. terhelésnél az Y irányú terhelés vonalmentén oszlik meg.

Az 5. terhelésnél az $x=-a/2$ síkon és az $x=a/2$ síkon megoszló terhelés hat x irányában. Tehát az $x=-a/2$ síkon nyomás, az $x=a/2$ síkon húzás hat. A terhelés intenzitása 0.5 N/mm^2

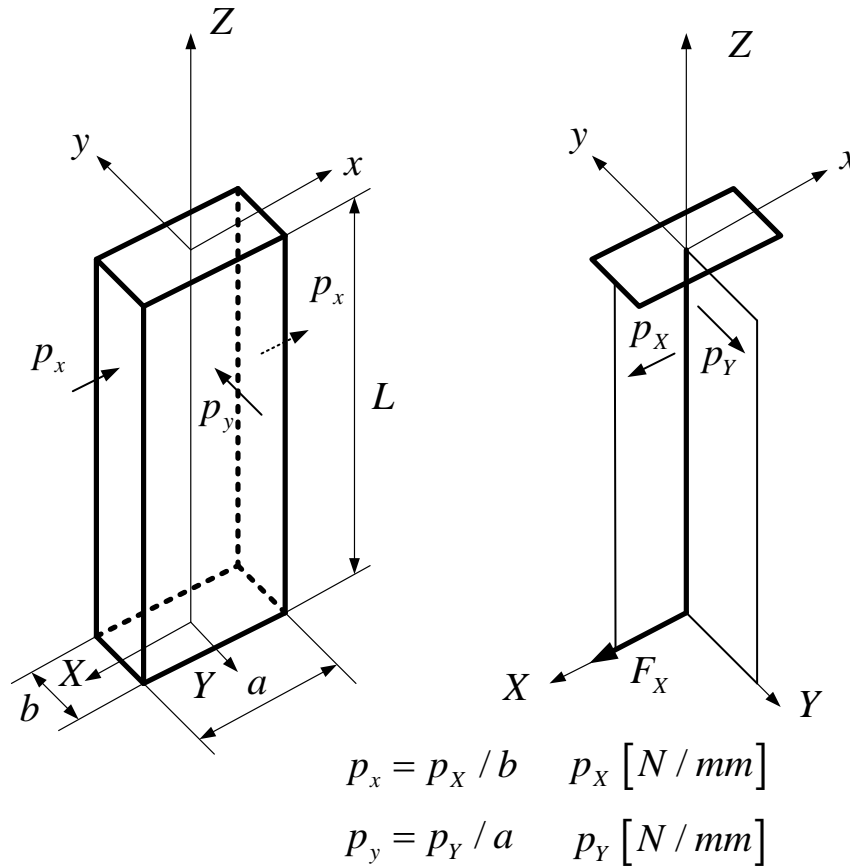
A 6. terhelésnél az $y=-b/2$ felületen nyomás hat 0.25 N/mm^2 intenzitással.

A kinyomatott feszültségmegoszlások a $Z=L/4$ síkra vonatkoznak.

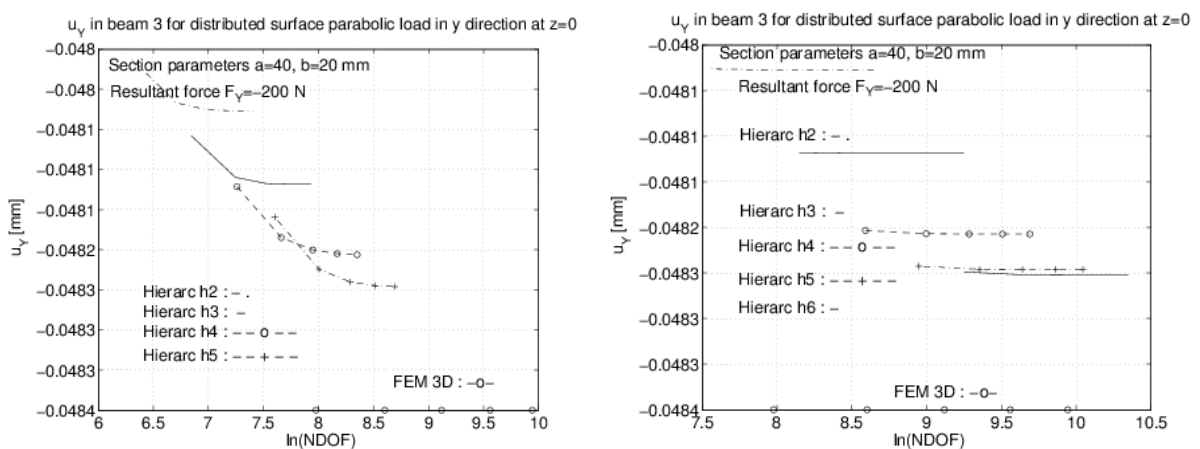
Sorbevéve a terheléseket, az alábbi eredményeket nyertük különböző hierarchikus modellnél, a rúdat 16 ill. 64 elemre felosztva.

A 2. terhelésnél a $-Y$ irányában ható, a $z=0$ síkban parabolikusan megoszló terhelésnél ($F_y = -200 \text{ N}$) a súlypont elmozdulását a 6. ábra mutatja. Jól látszik, hogy a hierarchia modell emelésével az elmozdulások alig változnak. Mindegyik görbénél a p fokszám növelése (2-6 között) ugyiszintén igazolja a megoldás konvergenciáját.

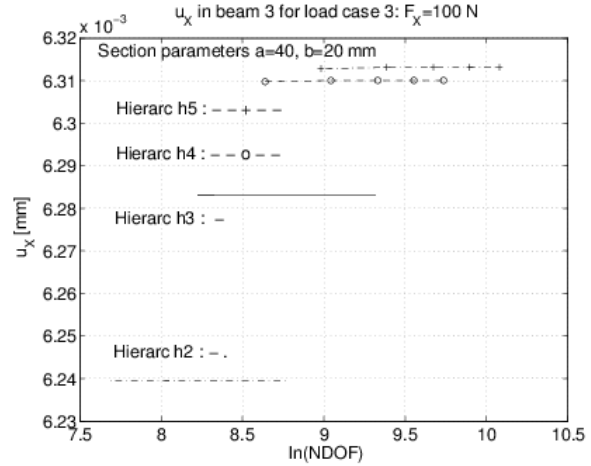
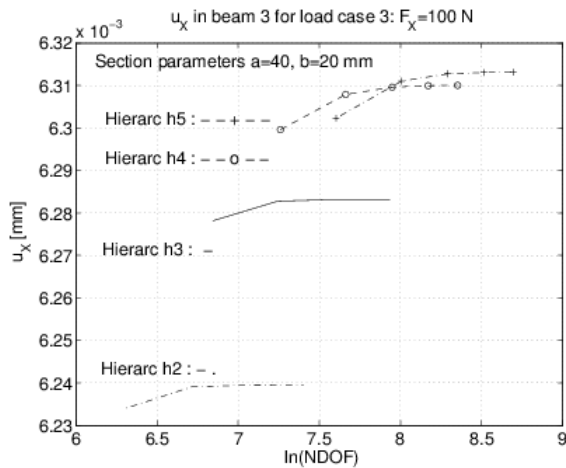
Rudelmélet szerint $u_y = F_Y \cdot L^3 / (3I_x E) = -0.04845$, ahol $I_x = ab^3 / 12 = 26666.66$. Nyírás figyelembevételével,
 $u_y = F_Y \cdot L^3 / (3I_x E)(1 + k_{yF}) = -0.04906$ [18, 218. oldal], ahol $\nu = 0.3$ Poisson számnál,
 $k_{yF} = \frac{6(1+\nu)}{10}(b/L)^2 = 0.78(b/L)^2 = 0.0126 \cdot h_0$ (Timoshenko modell): -0.04905 mm, 3D-s megoldás:
 $u_y(3D) = -0.0484$ mm.



5. ábra. Prizmatikus tartó geometriája, az XYZ globális és az xyz lokális koordinárendszer ($s=Z$). A $Z=L$ sík befalazott.



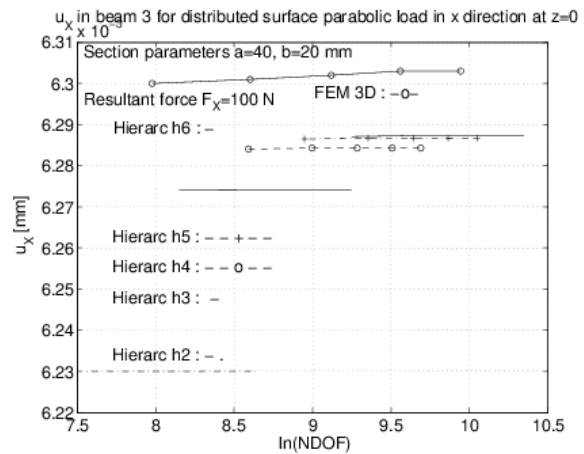
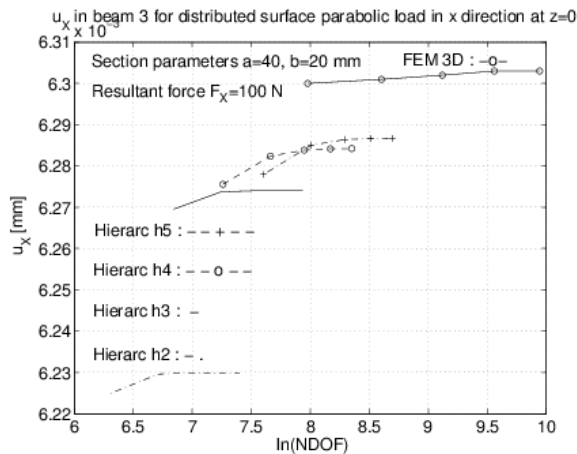
6. ábra. Konvergencia diagram a 2. terhelés (a véglapon parabolikusan megoszló terhelés hat, eredője $F_y = -200N$) esetén.



7. ábra. Konvergencia diagram a 3. terhelés (a véglap súlypontjában koncentrált erő hat) esetén.

Koncentrált erővel számolva 3. terhelésnél a konvergencia jól érzékelhető a 7. ábrán. Rúdelmélet szerint $u_x = F_x \cdot L^3 / (3I_y E) = 0.006055$, ahol, $I_y = a^3 b / 12 = 106666.66$ Nyírás figyelembevételével, $u_x = F \cdot L^3 / (3I_y E)(1 + k_{xF}) = 0.006362$ [18, 218. oldal], ahol $\nu = 0.3$ Poisson számnál, $k_{xF} = \frac{6(1+\nu)}{10}(a/L)^2 = 0.78(a/L)^2 = 0.0506$, $h0$ (Timoshenko modell): 0.006362 mm.

Ha az X irányában ható $F_x = 100N$ eredővel rendelkező erő parabolikusan oszlik meg a keresztmetszetben, akkor nyilvánvalóan e miatt a súlypont elmozdulása kisebb lesz (8. ábra), mint amit a koncentrált erő ráhelyezésekor kaptunk (7. ábra). Rúdelmélet szerint $u_x = F_x \cdot L^3 / (3I_y E) = 0.006055$, ahol, $I_y = a^3 b / 12 = 106666.66$, 3D-s megoldás $u_x(3D) = 0.006303$ mm



8. ábra. Konvergencia diagram a 3. terhelés (a véglapon parabolikusan megoszló terhelés hat, eredője $F_x = 100N$) esetén.

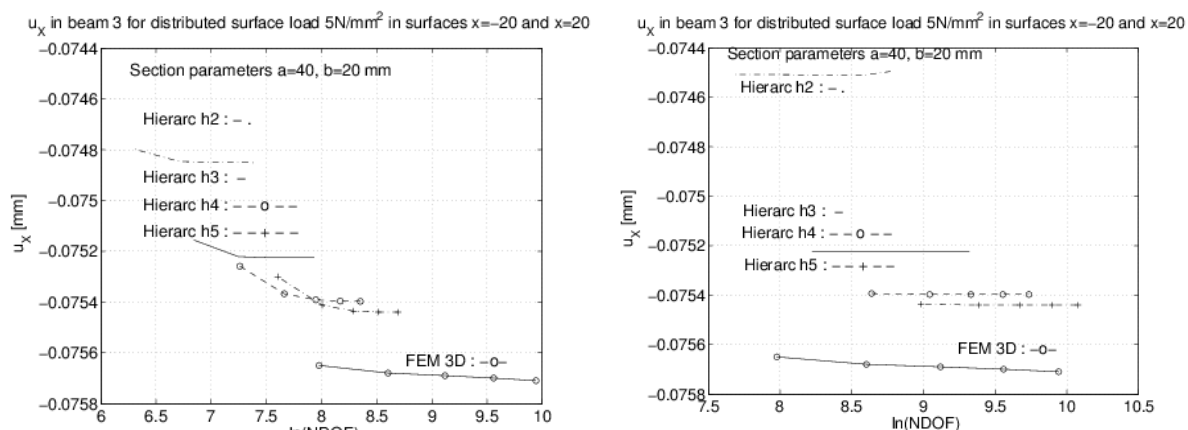
Vizsgáljuk a 2. táblázat 5. és 6. terhelésnél kapott $z=0$ sík súlypontjának elmozdulását.

Terhelés 5 esetén az $x=-a/2$ síkon nyomás, az $x=a/2$ síkon húzás hat. A terhelés intenzitása $0.5 N / mm^2$.

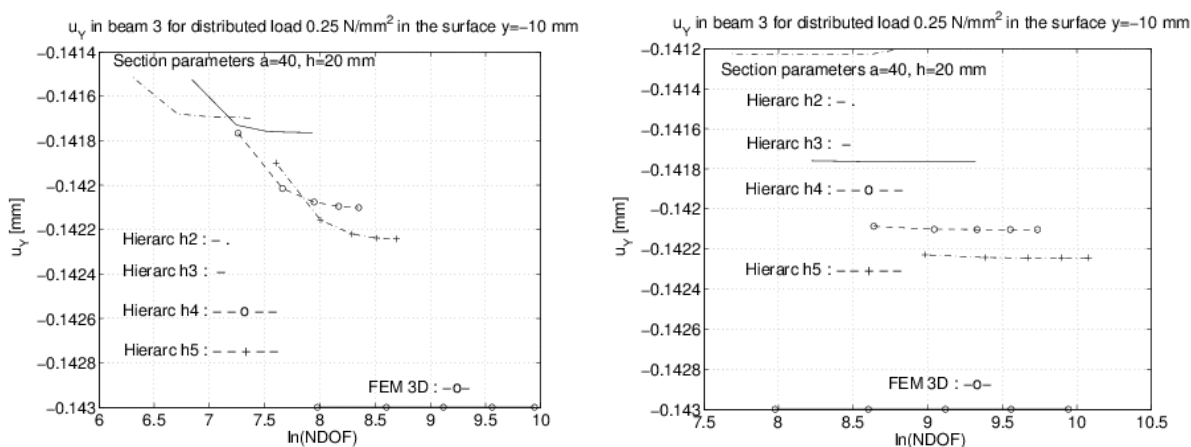
Rudelmélet szerint $u_x = p_{x,lin} \cdot L^4 / (8I_y E) = -0.07134$. Itt $p_{x,lin} = 2p_x \cdot b = 10 \text{ N/mm}$. Nyírás figyelembevételével, $u_{x,nyír} = p_{x,lin} \cdot L^4 / (8I_y E)(1+k_x) = 0.07616$, ahol $\nu = 0.3$ Poisson számnál, $k_x = 1.04(a/L)^2 = 0.0644$, [17, 156. oldal]. A 3D-s megoldás $u_x(3D) = -0.07571$ mm. /Az 5. ábra szerint $x = -X, y = -Y$. A konvergencia eredményeit a 9. ábra tartalmazza.

A 6. terhelésnél az $y = -b/2$ felületen nyomás hat 0.25 N/mm^2 intenzitással. Rudelmélet szerint $u_y = p_y \cdot L^4 / (8I_x E) = -0.1426$. Nyírás figyelembevételével, $u_{y,nyír} = p_y \cdot L^4 / (8I_x E)(1+k_y) = 0.1451$, ahol $\nu = 0.3$ Poisson számnál, $k_y = 1.04(b/L)^2 = 0.01685$ [17, 156. oldal]. A 3D-s megoldás $u_y(3D) = -0.143$ mm. /Az 5. ábra szerint $x = -X, y = -Y$. Vonalmenti megoszló terheléssel (10 N/mm), $h0$ (Timoshenko modell): 0.1451 mm. A konvergencia eredményeit a 10. ábra tartalmazza.

A 11. ábra $h6$ -os modellnél, $p=6$ os approximációt használva, különböző számú végelemet felvéve jól mutatja a megoldás konvergenciáját a 6. típusú terhelésnél. Már 16 elemnél a megoldás gyakorlatilag azonos a 64 elemes megoldással. Tehát nincs értelme 16 elemnél sűrűbb felosztást használni.



9. ábra. Konvergencia diagram az 5. terhelés esetén.



10. ábra. Konvergencia diagram a 6. terhelés esetén.

A fent bemutatott számításokból az alábbi általános következtetések vonhatók le.

A klasszikus rúdelmélet (Bernoulli hipotézis) kisebb értéket ad, mint a Timoshenko nyírási energiát figyelembe vevő megoldás. A 3D-s végeelemes megoldás a hierarchikus megoldásokat meghaladja, de mindig kisebb, mint a Timoshenko féle megoldás, vagyis a Timoshenko féle felső korlátot szolgáltat.

Érdekesége a számításoknak, hogy ha a hierarchikus $h0$ modellben csak a $\sigma_3 = E\varepsilon_3$ egyszerű Hooke törvényt,

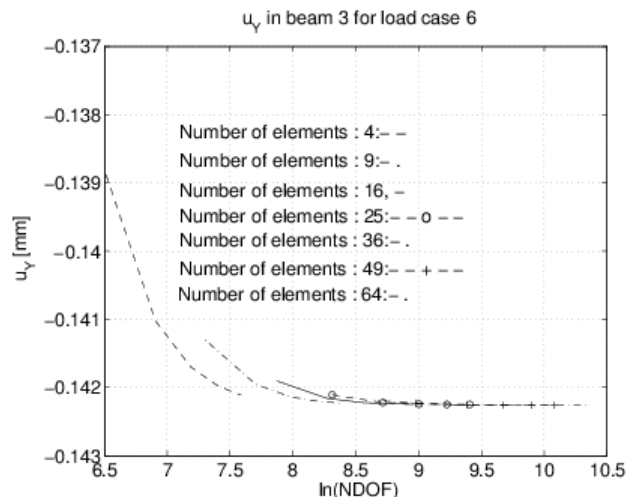
illetve a nyíró feszültségek vonatkozásában $\tau_{i3} = \frac{5}{6}G\gamma_{i3}, i=1,2$ összefüggést használjuk (lényegében a

Timoshenko féle modellre alapozva építjük fel a végeelemes modellünket), akkor a nyírási figyelembevételével alkalmazott klasszikus formulák eredményeihez jutunk. Ha a $h1$ modellnél az általános Hooke törvényt használjuk, akkor lényegesen kisebb elmozdulásokat kapunk. Ez nyilvánvaló, hisz ennél a modellnél az elmozdulások közelítéséből adódóan, nem számolható σ_1, σ_2 továbbá τ_{12} . Ugyanakkor most

$\sigma_3 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_3 = 1.3461E\varepsilon_3$. Ebből adódóan a rendszer merevebb mint a valóság, tehát az elmozdulás \sim

0.743 szorosa a $\sigma_3 = E\varepsilon_3$ összefüggéssel kapotthoz képest.

A magasabb hierarchikus modellek természetesen az általános Hooke törvénnyel dolgoznak, és az elmozdulás közelítéséből adódóan már mind a feszültség vektor 6 tagja meghatározást nyer. Az is látszik, hogy a hierarchia szintjének növekedésével az elmozdulások nőnek (Itt mindig az abszolút értékről beszélünk).



11. ábra. $h6$ -os modell konvergenciája a 6. terhelésnél.

Ezek után rátérünk a feszültségekre kapott eredmények elemzésére. Mindegyik terhelést nem nézzük itt meg, csak az 5. és 6. terhelést.

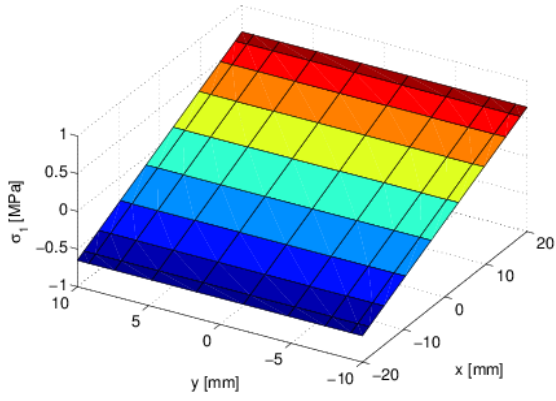
Terhelés 5:

$p_x = 0.5 \text{ MPa}$ intenzitású terhelés működik az $x = -a/2$ és az $x = a/2$ felületen (x irányban hatnak, azaz $x = -a/2$ felületen, mint nyomó feszültség, az $x = a/2$ felületen, mint húzó feszültség).

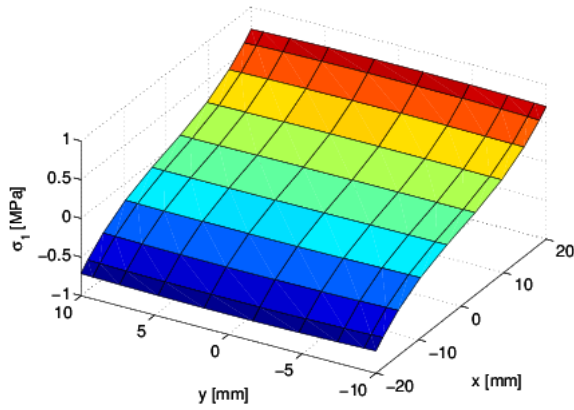
A 12. ábra a σ_1, τ_{13} feszültségek megoszlását mutatja különböző hierarchikus modelleknél. Nagyon jól látszik, hogy a σ_1 megoszlása a $h3$ modellnél sem elégíti ki a dinamikai (feszültségi) peremfeltételt, a τ_{13} megoszlása mindegyik modellnél hasonló lefutású, az $x = -20$ és $x = 20$ peremeken gyakorlatilag zérus értékű.

A 13. ábrán a σ_3 normálfeszültséget láthatjuk. A klasszikus elméletből ismert lineáris megoszlást kapjuk.

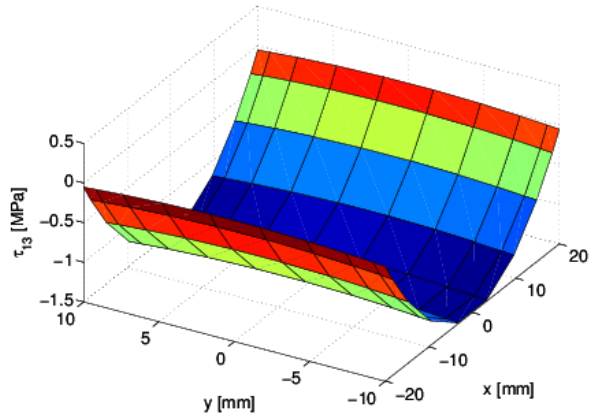
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h2



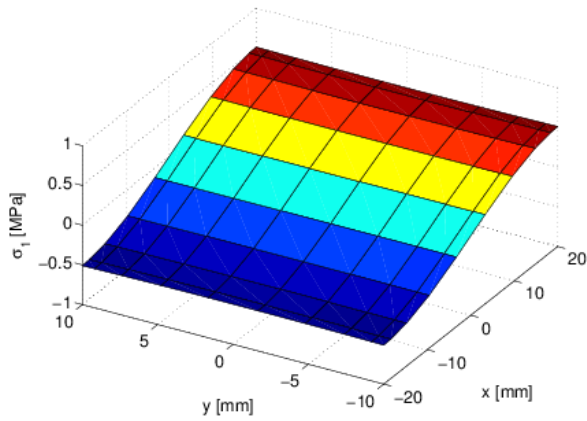
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h3



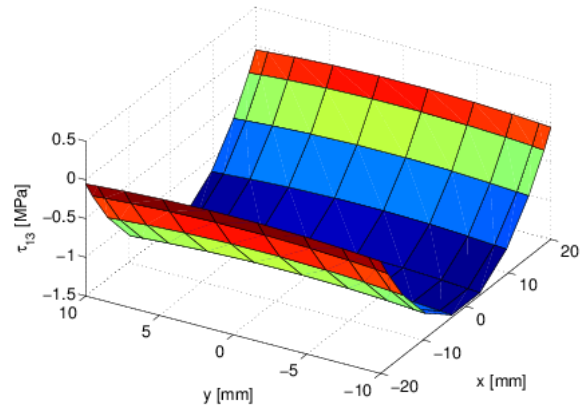
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h3



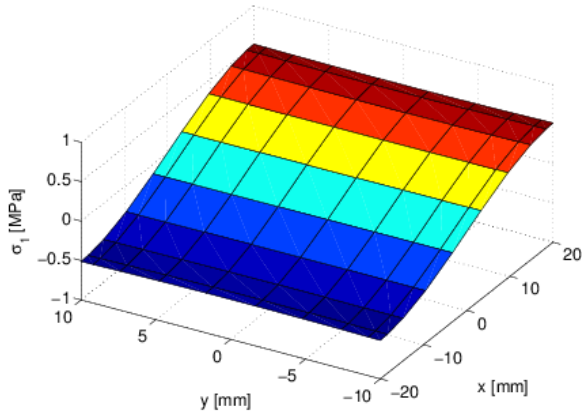
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h4



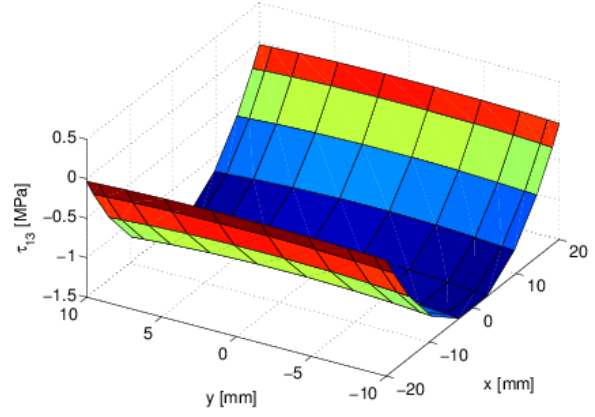
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h4



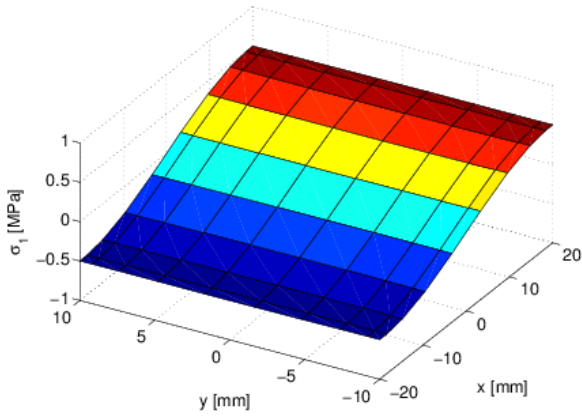
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h5



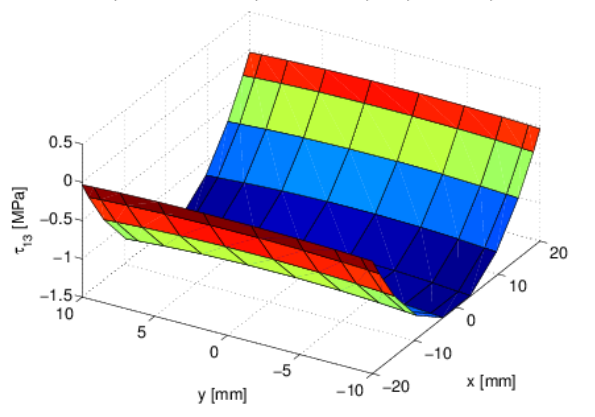
Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h5



Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h6

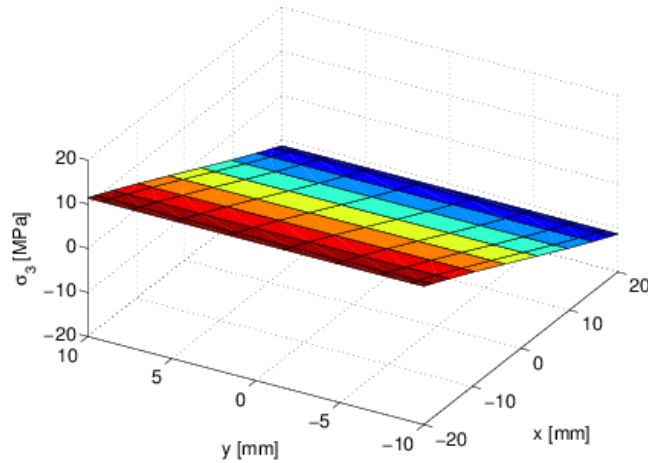


Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h6



12. ábra. σ_1, τ_{13} feszültségek megoszlása az 5. terhelésnél (modell h3, h4, h5, h6).

Num=5, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h6

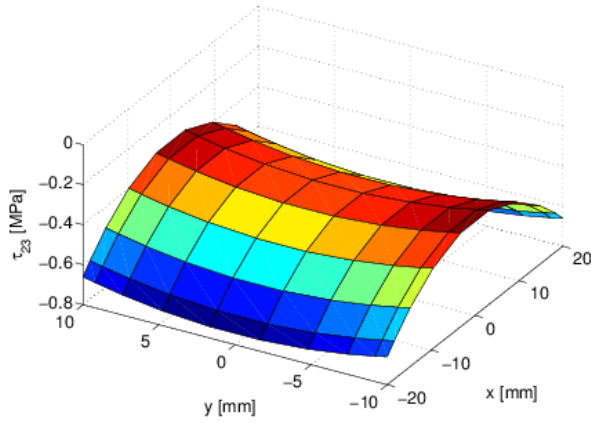


13. ábra. σ_3 feszültség megoszlása az 5. terhelésnél a $Z=L/2$ metszetben.

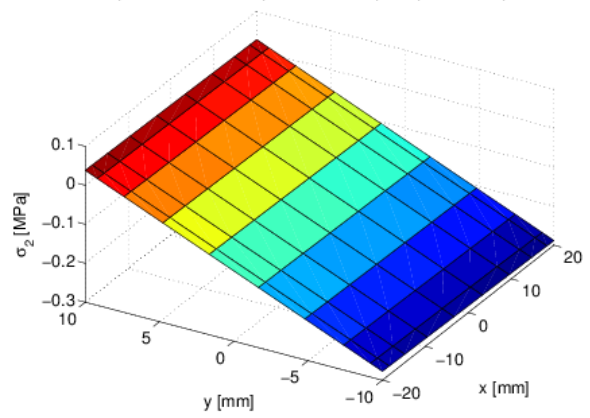
Terhelés 6:

$p_y = 0.25 \text{ MPa}$ nyomó feszültségként hat az $y=-b/2$ felületen

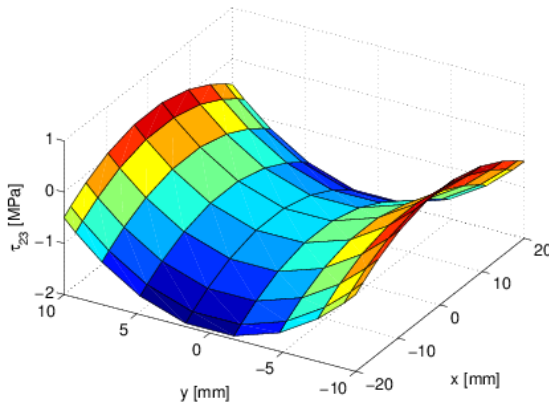
Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h2



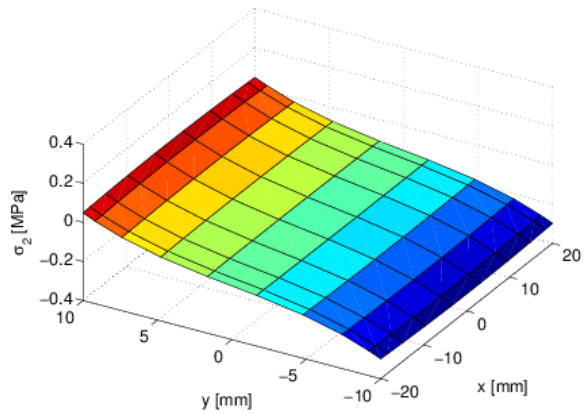
Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h2



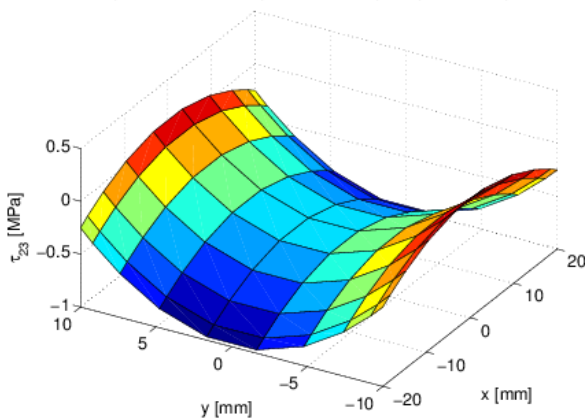
Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h3



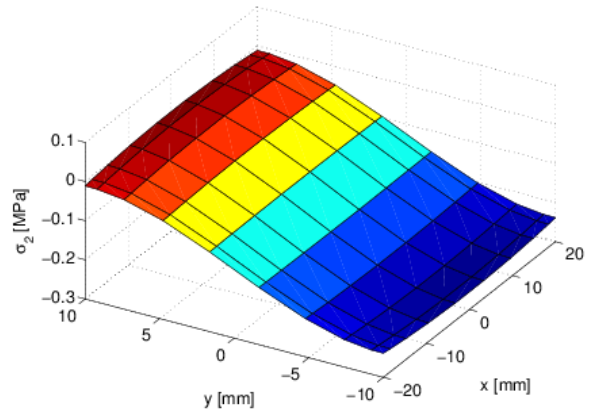
Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h3

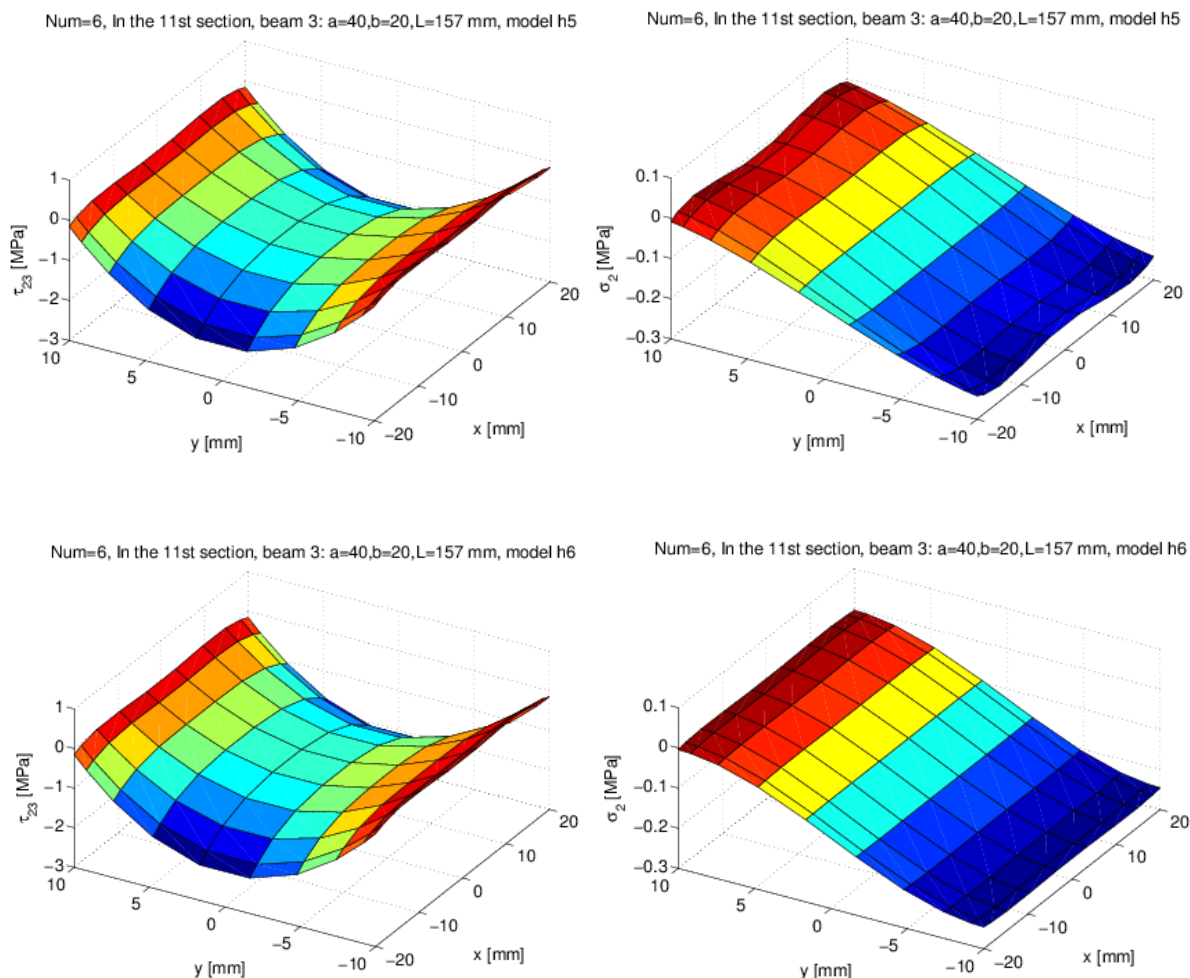


Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h4



Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,L=157 mm, model h4





14. ábra. τ_{23} , σ_2 feszültségek megoszlása a 6. terhelésnél (modell h_2 , h_3 , h_4 , h_5 , h_6).

Itt a τ_{23} peremfeltételt kielégítő megoldása csak a h_5 – h_6 modellnél figyelhető meg, σ_2 esetén a h_4 -es modell, már nagyon jól kielégíti a feszültségi peremfeltételeket (lásd 14. ábra). A legpontosabb megoldáshoz a h_6 -nál jutunk. A tengelyirányú feszültségek a h_5 és h_6 modellnél a 15. ábrán láthatóak. Ezen ábrák a $Z=L/4$ síkban keletkező feszültséget mutatják. A maximális érték 2.937 MPa (h_5 -nél), míg a h_6 modellnél 2.952 MPa. Klasszikus rúd modellnél 2.889 MPa-t kapunk. A $Z=3L/4$ síkban h_6 -nál $\sigma_{3,\max} = 26.02 \text{ MPa}$.

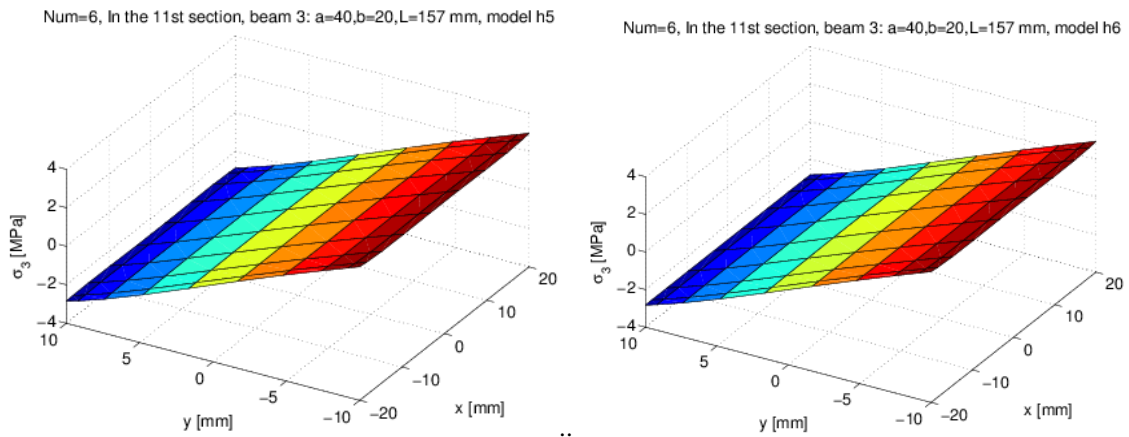
3D-s végelem programmal (StressCheck) a feladatot megoldva a $\sigma_3 = \sigma_z$ feszültség a $Z \leq 3L/4$ szakaszon a 16a. ábrán látható, aminek maximuma $\sigma_{3,\max} = 26.03 \text{ MPa}$. A program $p=8$ -al futott le, az ismeretlenek száma 20808. A $\sigma_2 = \sigma_y$ feszültséget a 16b. ábra tünteti fel. Jól látszik, hogy a befalazás hatása (peremzavarás), a rúd negyed hosszára terjed ki.

A σ_1 feszültség vonatkozásában a különböző modelleknél kapott megoszlásokat a 17. ábra tartalmazza. Elvileg az $x=-20$ és $x=20$ peremeken zérus feszültséget kellene kapnunk. Ez, láthatóan csak a h_6 -nál teljesül.

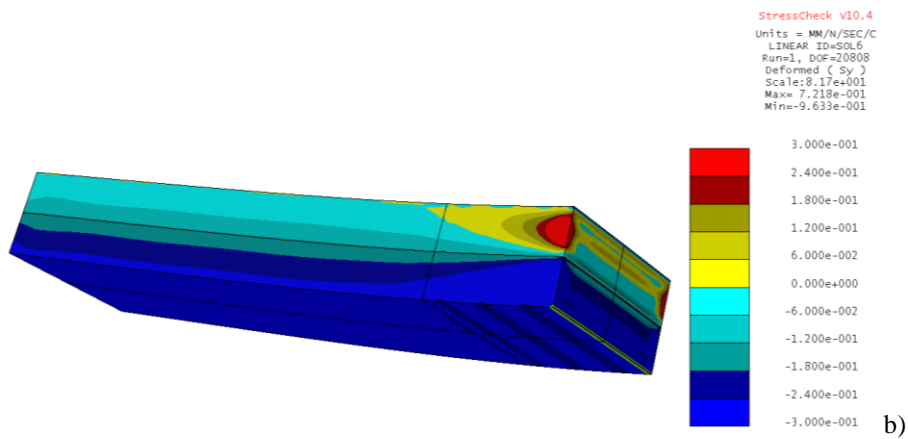
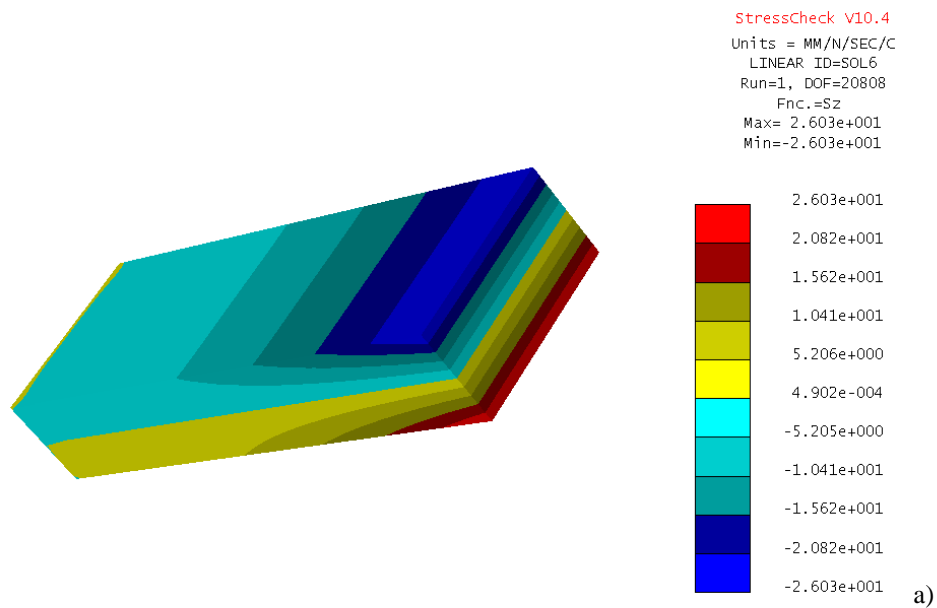
Persze ezek a feszültségek a $\sigma_{3,\max}$ -hoz képest elhanyagolhatók, ami a rúd elmélet gyakorlati alkalmazhatóságát is igazolja.

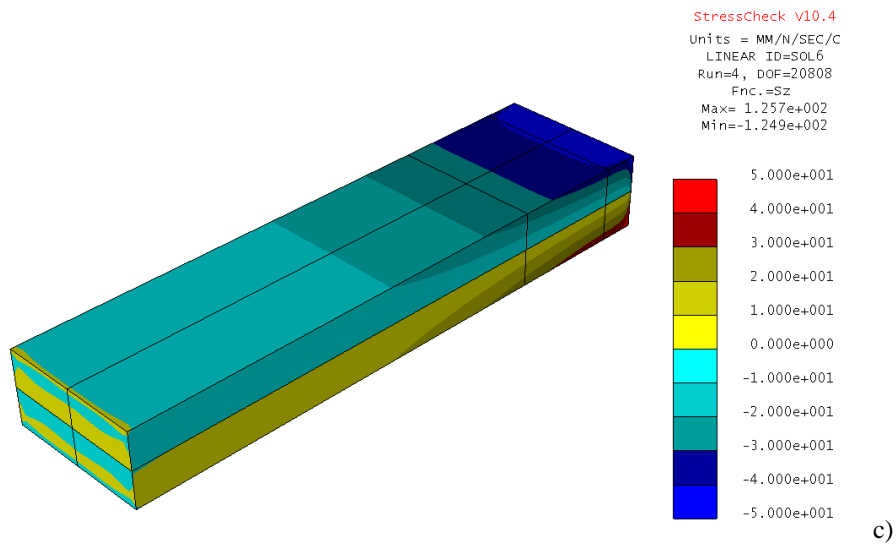
Megjegyezzük, hogy a befalazás környezetében $Z=L$ helyen a normál feszültségek jelentősen megnövekednek. A h_6 modellel a redukált feszültség 67.5 MPa értékre “kúszik fel”, holott a rúd elméleti csak $\sigma_{3,\text{rúd}} = 46.7 \text{ MPa}$. Ennek a környéknek a pontos feszültségállapotát csak 3D-s modellel lehetne kiszámolni, a hierarchikus rúdmodell erre már alkalmatlan. A 16c. ábra szerint a befalazásnál jelentkező szingularitások miatt jelentkező feszültségi csúcs $\sigma_{3,3D} = 125.7 \text{ MPa}$. Ez azonban függ a polinom fokszámától és a háló megválasztásától. A szingularitások miatt a feszültség nem véges szám, tehát nem lehet a számítások célja. A matematikai modellek

megválasztásánál mindig figyelembe kell vennünk a számítások célját, amelynek véges számnak kell lenni. A jelen esetben pl. a befalazásnál ébredő erőket és nyomatékokat pontosan számíthatjuk. A hierarchikus rúdmodelleknél a hierarchia szintjével növekedik a megadható peremfeltételek száma. Pl. a befalazás helyett az elmozdulások integrálját vehetjük zérusnak. Ebben az esetben a szingularitások nem jelentkeznek és a feszültségek véges számok.

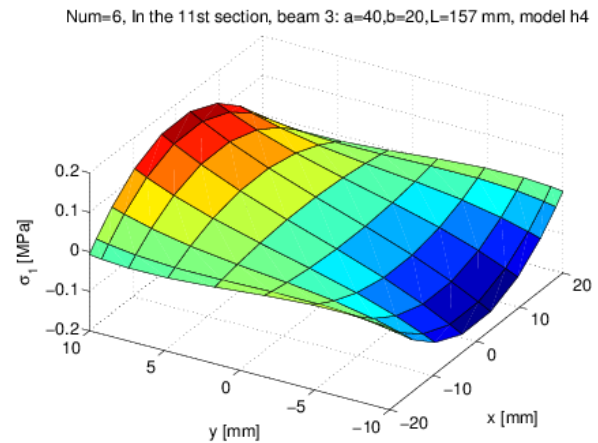
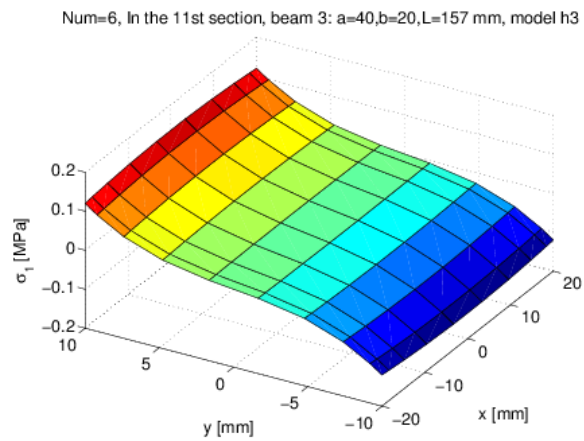
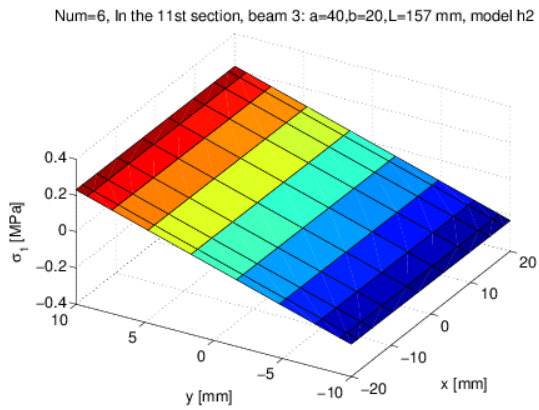


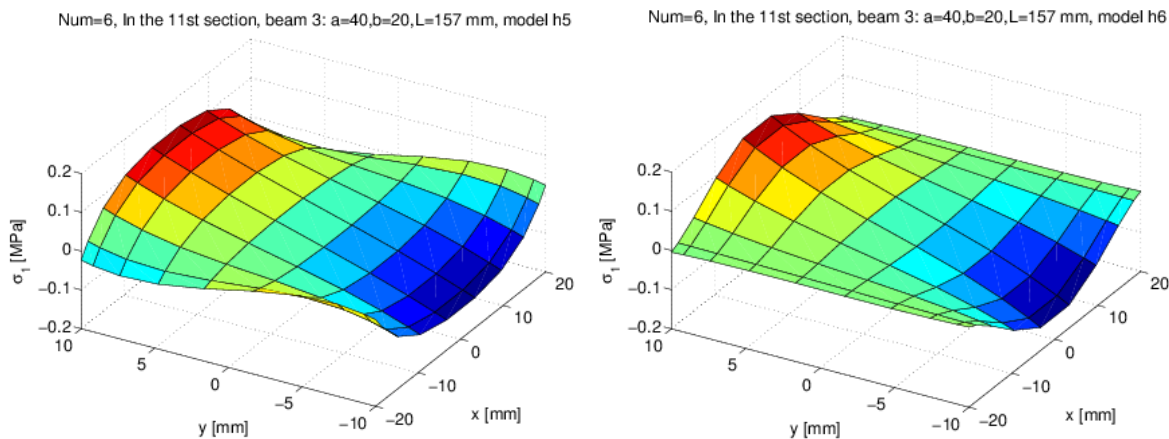
15. ábra. σ_3 megoszlása a $z=L/4$ síkban (modell $h5$, $h6$) a 6. terhelésnél.





16. ábra. a), c) σ_3 feszültség, b) σ_2 megoszlása a prizmatikus tartóban 3D-s megoldásnál a 6. terhelésnél.

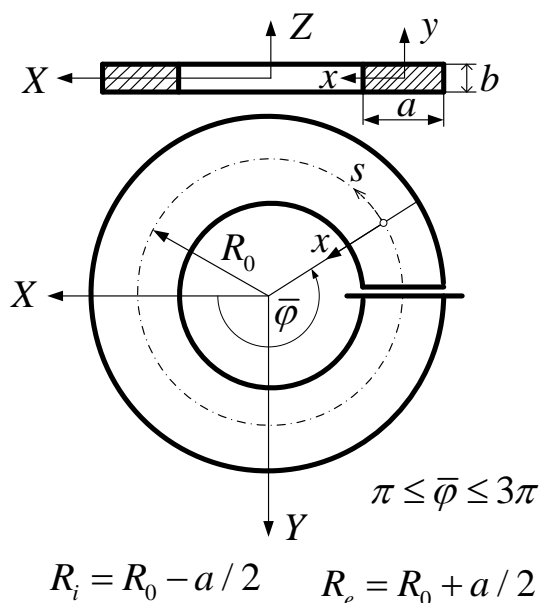




17. ábra. τ_{13} feszültség megoszlása a 6. terhelésnél (modell h_2, h_3, h_4, h_5, h_6).

3.2 Görbe tartó esete (18. ábra)

Geometriai adatok: $R_0 = 100 \text{ mm}$, $a = 40 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$. Anyag lineárisan rugalmas, homogén, izotróp.
 Anyagállandók: Rugalmassági modulus $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, Poisson szám $\nu = 0.3$.



18. ábra. Görbe tartó geometriája, a globális XYZ koordináta-rendszer, ill. a lokális x, y, s koordináta-rendszer. A $\bar{\varphi} = 3\pi$ sík befalazott.

Terheléseket a 3. táblázat foglalja magába. Koncentrált erők és nyomatékok működhetnek a görbe rúd $\bar{\varphi} = \pi$ metszetében annak súlypontjában. (1-3 terhelési esetek), ill. a helyi görbevonalú x, y, s koordináta-rendszerben értelmezett felületen megoszló terhelések is hathatnak, 5., 6. terhelési eset.

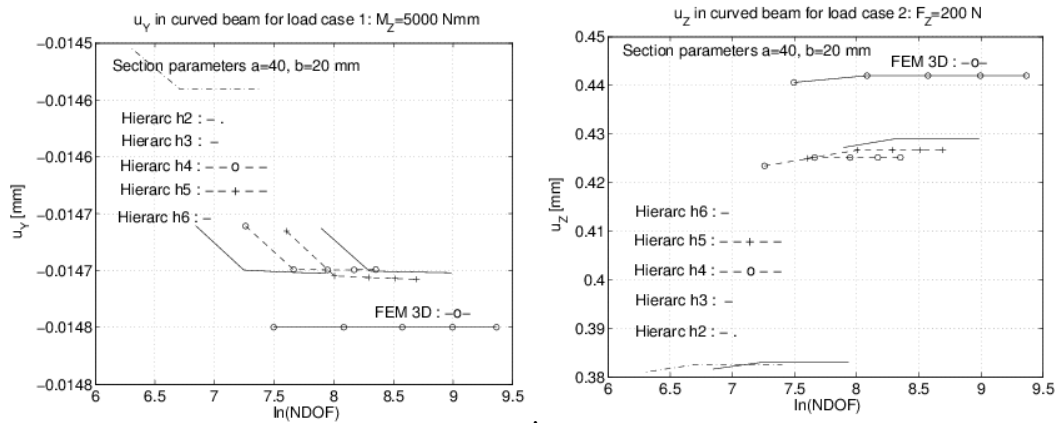
Az 5. terhelés a belső $R_i = 80 \text{ mm}$ sugarú hengeres felületen hat mint nyomó feszültség, azaz $-x$ irányában működik. A 6. terhelés a $y = -b/2$ felületen hat felfelé, azaz Z (y) irányában, tehát itt is nyomás hat a testre.

Terhelés jele	F_x [N]	F_z [N]	M_z [Nmm]	p_x [N/mm ²]	p_y [N/mm ²]
1			5000		
2		200			
3	-100				
4					10 N/mm
5				-0.625	
6					0.25

3. táblázat: Görbe tartó terhelési adatai

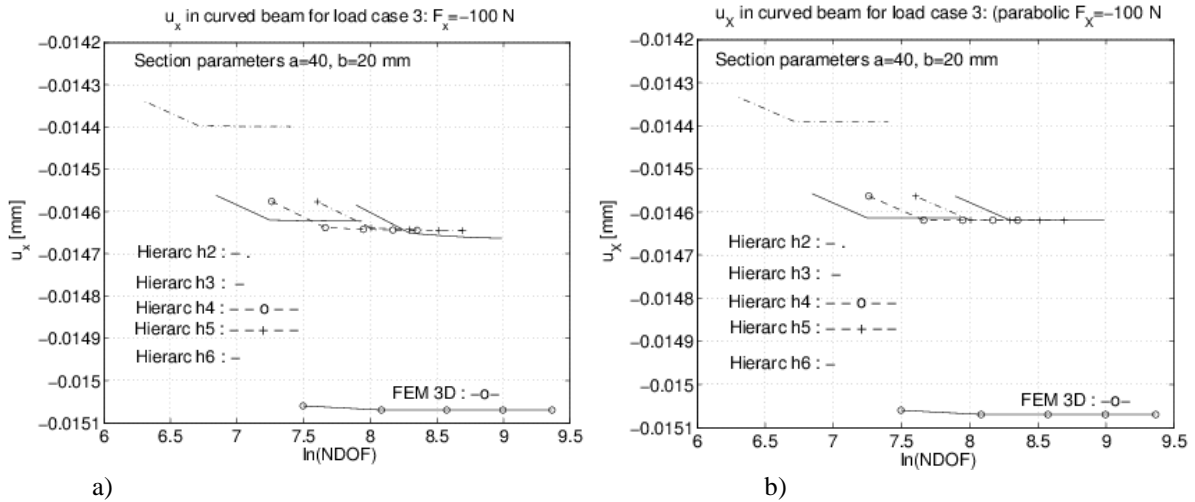
A különböző terheléseknél kapott konvergencia diagramokat a 19-21. ábra tartalmazza. Itt a StressCheck végelem programmal [15] kapott 3D-s megoldás eredményei is fel vannak tüntetve. A diagramok jól érzékeltek a megoldás gyors konvergenciáját.

Terhelés 1, 2:



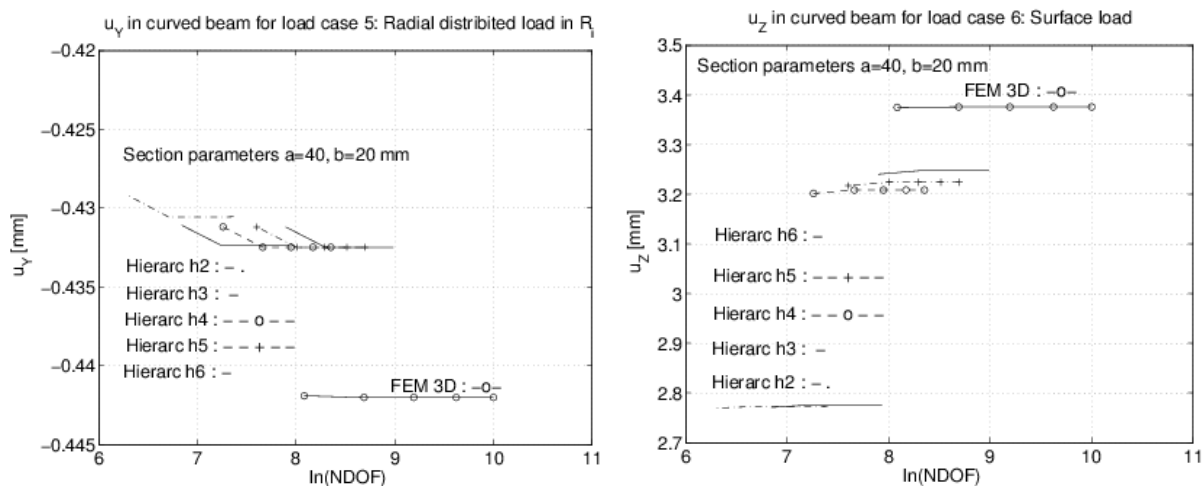
19. ábra. Konvergencia diagramok 1,2. terheléshez tartozóan

Terhelés 3:



20. ábra. A 3. terheléshez tartozó konvergencia diagram a) koncentrált erő, b) a véglapon parabolikusan megoszló -X irányú terhelés működik, amelynek eredője $F_x = -100N$.

Terhelés 5, 6:



21. ábra. Konvergencia diagramok az 5, 6. terheléshez tartozóan.

Rúdelmélet alapján, [18, 301. oldal] az elmozdulások a rúd terhelt keresztmetszet súlypontjában (1. és 3. terhelésnél)

$$u_y = \frac{R_0^2}{I_x E} [F_y R_0 3\pi - M_z 2\pi], \quad \chi_z = \frac{R_0}{I_x E} M_z 2\pi, \quad u_x = \frac{R_0^2}{I_x E} F_x \pi$$

összefüggésekkel számolhatók. Illetve a 2. terhelésnél [19, 253 oldal] szerint

$$u_z = \frac{R_0^3}{I_T G} F_z 3\pi + \frac{R_0^3}{I_x E} F_z \pi = 0.4526 \text{ mm}, \text{ ahol } I_T = 73183 \text{ mm}^4 \text{ torzitási másodrendű nyomaték /a [19] 136.}$$

oldalon lévő képlettel számolt érték/. Esetünkben 3. terhelésnél $u_x = \frac{R_0^2}{I_x E} F_x \pi = 0.0147 \text{ mm}$,

1. terhelésnél $u_y = -\frac{R_0^2}{I_x E} [M_z 2\pi] = -0.0147 \text{ mm}$. Megjegyzendő, hogy ennél a terhelésnél a $h0$ (Timoshenko modell): -0.01444 mm értéket ad.

A fenti számítások jól mutatják mindegyik terhelésnél a hierarchiai szint emelésével konvergálunk a 3D-s megoldás felé. A 3D-s megoldáshoz viszonyítva az eltérés igen kicsiny, gyakorlatilag kisebb mint 5%. Láthatóan a klasszikus rúdelméleti modellek síkbeli alakváltozásoknál jó közelítést adnak, de a 2. terhelésnél amikor test elmozdulásai kilépnek a kezdeti síkjukból, már nagyobb elmozdulást kapunk mint amit a mi modellünk és a 3D-s modell szolgáltat.

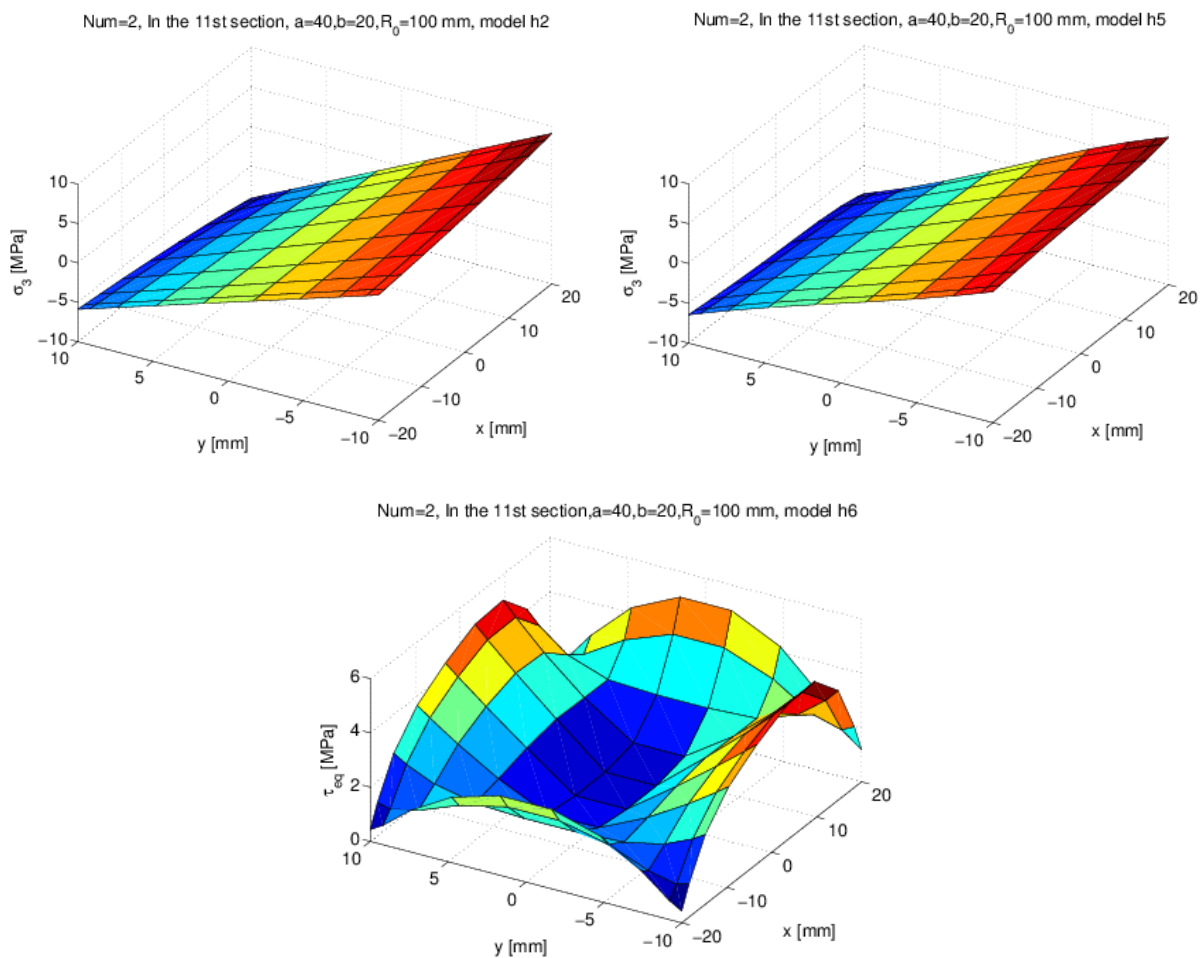
A következőkben, az egyes modelleknél kiszámolt feszültségeket fogjuk analizálni különböző terheléseknél. Kezdjük vizsgálatainkat a Terhelés 2-vel.

Terhelés 2: Ennél a terhelésnél a $\bar{\varphi} = \pi$ hez rendelt végkeresztmetszetben függőlegesen Z irányában

$$F_z = 200 \text{ N} \text{ erő működik.}$$

Különleges helynek bizonyul a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ keretszmetzet. A szóbanforgó $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben az $F_z = 200 \text{ N}$ terhelés a csúsztató feszültség szempontjából nyíró és csavaró igénybevételt szolgáltat, míg a σ_3 normál feszültség szempontjából a x körüli hajlításról beszélhetünk. A normál feszültségeket illetően nincs különbség az alsó és felső hierachikus ($h2$, $h5$) modellek eredményei között (lásd 22. ábra). A csúsztató feszültségeknél azonban már más a helyzet. A 24. ábra szerint a τ_{13} egészen jól közelített, hisz az $x = -20, 20$ peremeken zérus kell, hogy legyen, ami a $h4$ -nál már egész jól teljesül. A τ_{23} feszültség az $y = 10, -10$ peremeken zérus kell, hogy legyen, ezt a legjobban a $h6$ -os modell tudja teljesíteni (a $h4$, $h5$ -nél ezek integrálja az x mentén

zérus). Az eredő csúszató feszültség lefutását a 22. ábrán találjuk a *h6*-os modellnél. Elvileg a keresztmetszet sarokpontjaiban zérust kellene, hogy kapjunk, ez azonban csak kis hibával teljessül.



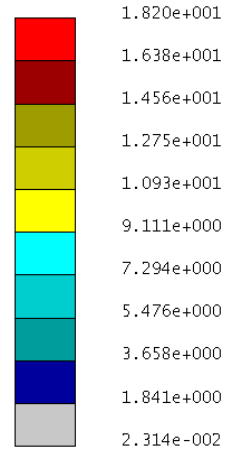
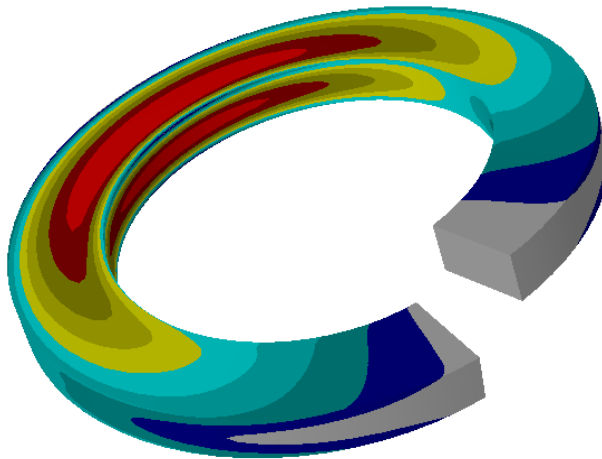
22. ábra. σ_3 normál feszültség megoszlása a 2. terhelésnél (modell *h2*, *h5*) a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben, ill.

$$\tau_{eq} = \sqrt{\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2} \text{ feszültség a } h6\text{-os modellnél.}$$

A redukált feszültség maximum a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben $\sigma_{eq} = 14.31\text{MPa}$ (3D modell $\sigma_{eq} \approx 14\text{MPa}$), a $\bar{\varphi} = 2\pi$ metszetben $\sigma_{eq} = 24.99\text{MPa}$, 3D-nél $\sigma_{eq} = 18.20\text{MPa}$. A redukált feszültség megoszlását a 23. ábra mutatja 3D-os megoldásnál.

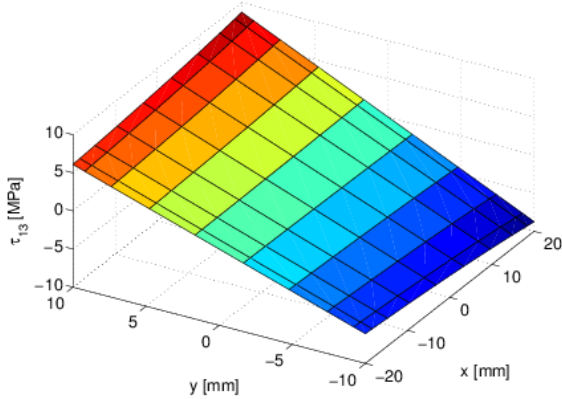
StressCheck V10.4

Units = MM/N/SEC/C
LINEAR ID=SOL2
Run=8, DOF=11664
Deformed (Seq)
Scale:6.98e+001
Max= 1.820e+001
Min= 2.314e-002

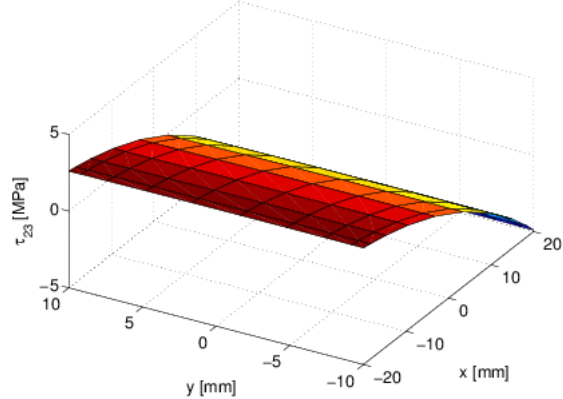


23. ábra. σ_{eq} redukált feszültség megoszlása a 2. terhelésnél (3D modell).

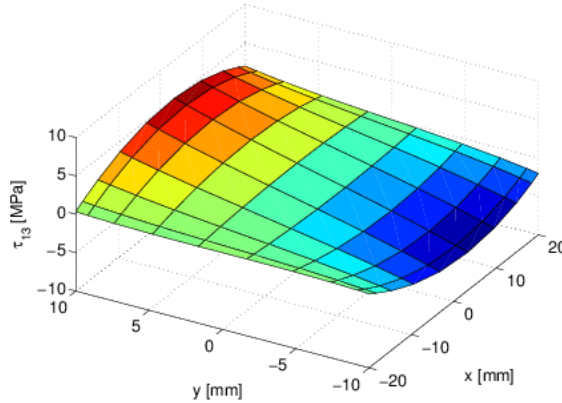
Num=2, In the 11st section,a=40,b=20,R₀=100 mm, model h2



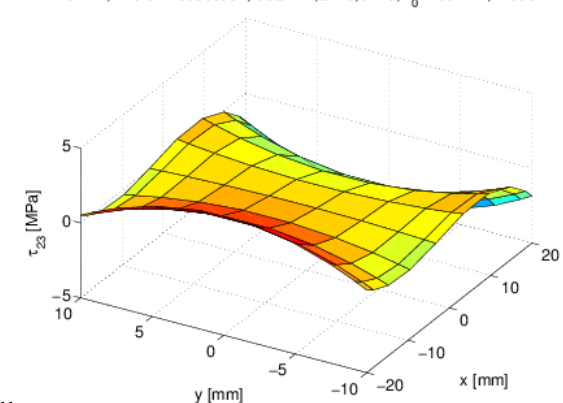
Num=2, In the 11st section, beam 2:,a=40,b=20,R₀=100 mm, model h2



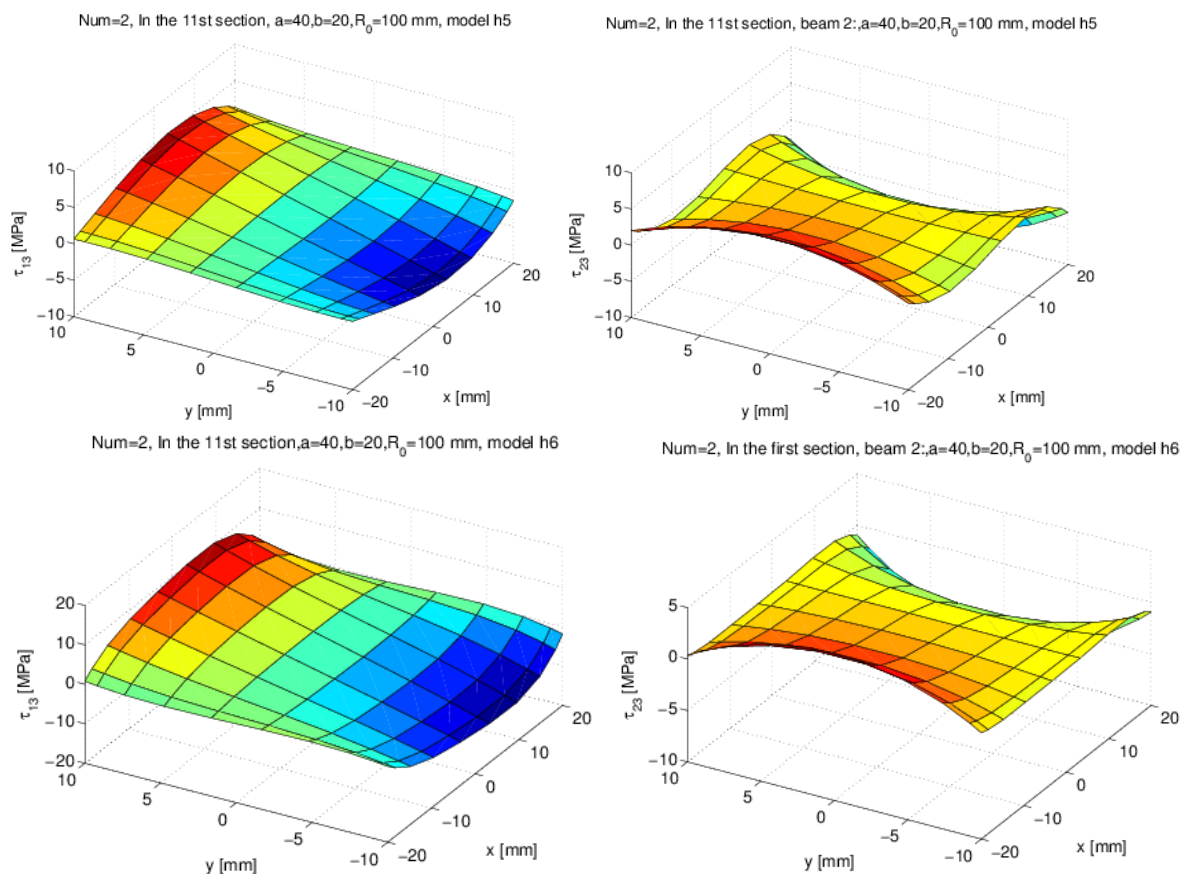
Num=2, In the 11st section,a=40,b=20,R₀=100 mm, model h4



Num=2, In the 11st section, beam 2:,a=40,b=20,R₀=100 mm, model h4

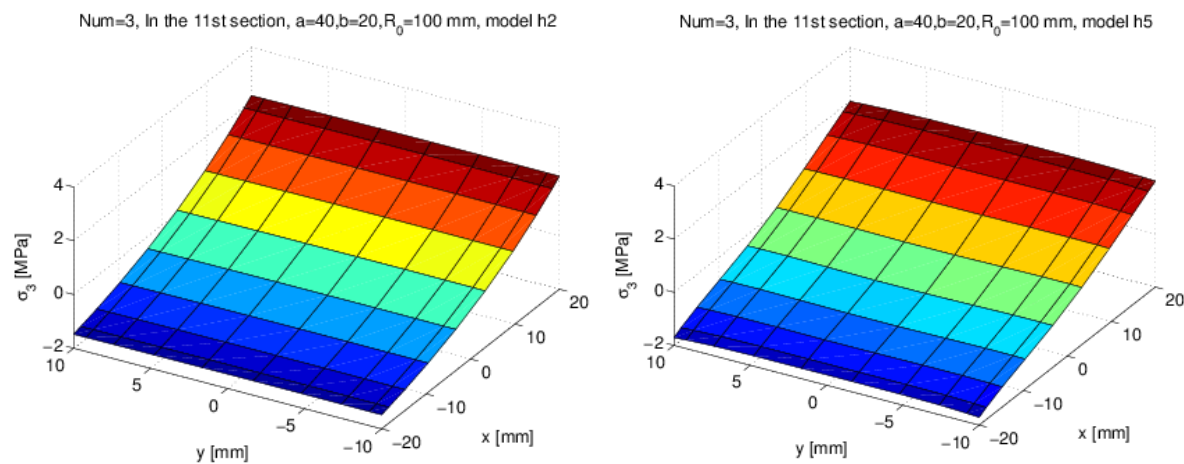


..



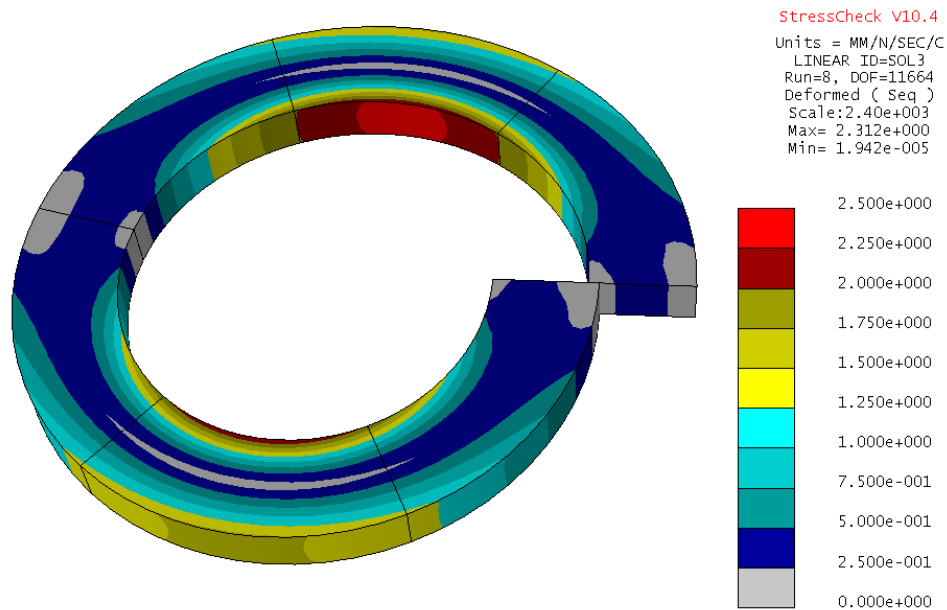
24. ábra. τ_{13}, τ_{23} feszültségek megoszlása a 2. terhelésnél (modell h2, h4, h5, h6) a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben.

Terhelés 3:



25. ábra. σ_3 feszültség megoszlása a 3. terhelésnél (modell h2, h5).

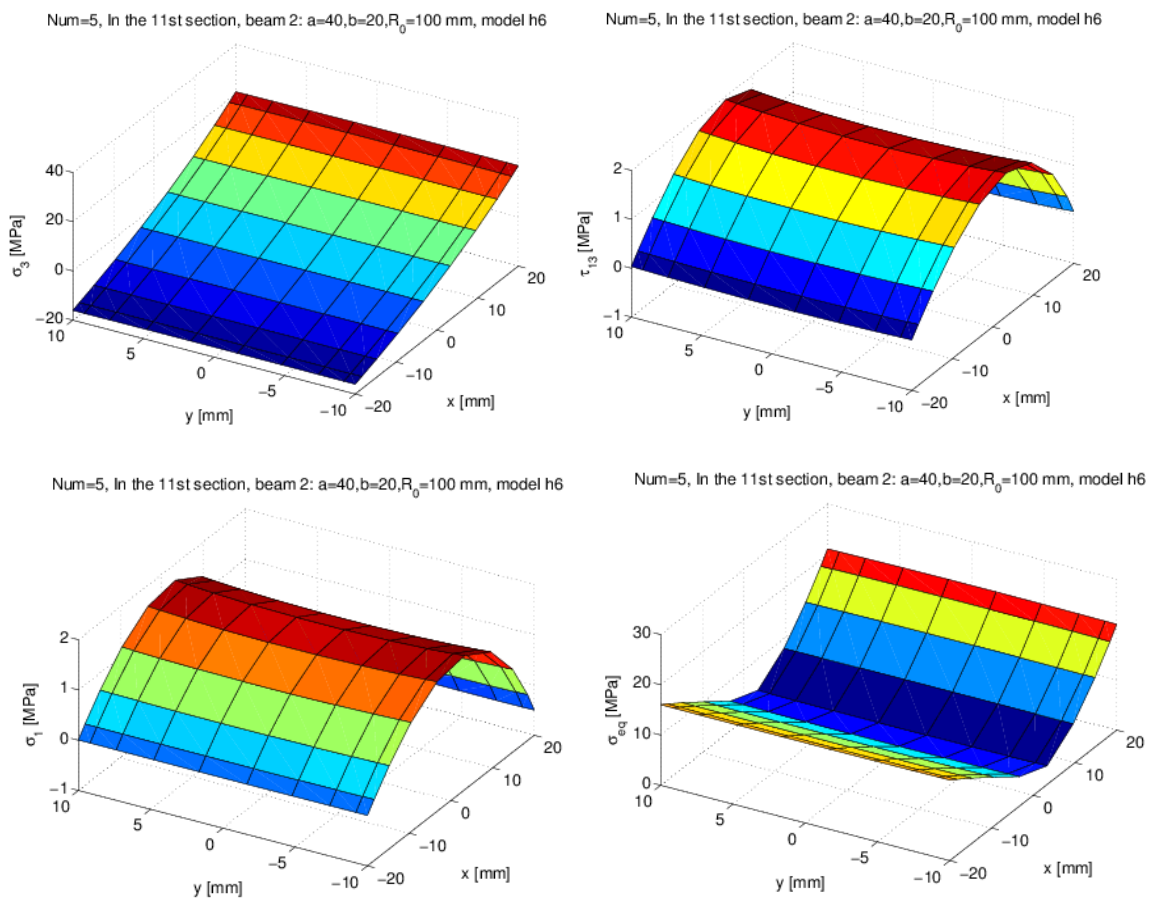
A görbe tartók klasszikus elméletéből ismert Grashoff-féle formula alapján jól emlékezünk arra, hogy a normál feszültség megoszlása már nem lineáris. Ezt jól érzékeljük a 25. ábrán. A kétfajta hierarchikus modell (h2, h5) eredményei gyakorlatilag azonosak. A redukált feszültség maximum a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben van, ennek értéke $\sigma_{eq} = 2.19MPa$ (3D modell $\sigma_{eq} = 2.31MPa$), a $\bar{\varphi} = 2\pi$ metszetben $\sigma_{eq} = 0.477MPa$, 3D-nél $\sigma_{eq} \approx 0.5MPa$. A 3D-s modell eredményei a 26. ábrán láthatóak.



26. ábra. σ_{eq} redukált feszültség megoszlása a 3. terhelésnél (3D modell).

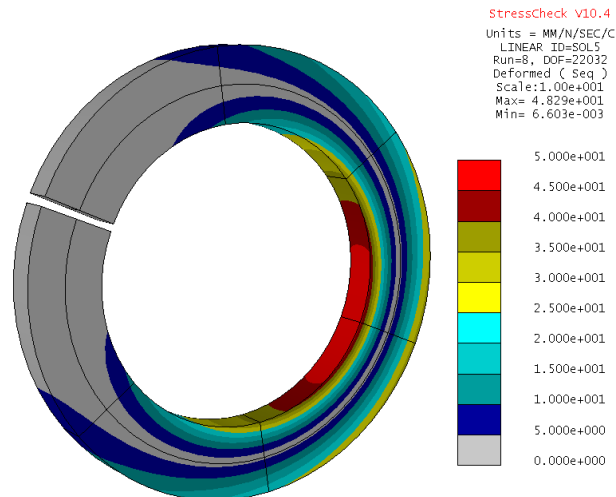
Terhelés 5:

Ennél a terhelésnél a belső paláston radiális irányban hat a felületen megoszló $p_x = -0.625 \text{ MPa}$ intenzitású terhelés. A $\sigma_3, \tau_{13}, \sigma_1, \sigma_{eq}$ feszültségek $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetszeti megoszlását a 27. ábra tünteti fel.



27. ábra. $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ keresztmetszetben $\sigma_3, \tau_{13}, \sigma_1, \sigma_{eq}$ feszültségek megoszlása.

Mint ahogy a τ_{13} feszültség az $x = 20$ és $x = -20$ peremeken zérus kell, hogy legyen, ezt a $h6$ modell teljesíti. A σ_1 vonatkozásában a $h6$ -os modell teljesíteni a $\sigma_1 = -0.625 \text{ MPa}$ peremfeltételt az $x = 20$ ($R = 80 \text{ mm}$ –es hengeres paláston), ill. a $\sigma_1 = 0$ feszültségmentességet a külső hengeres paláston, ($x = -20, R = 120 \text{ mm}$). A redukált feszültség maximumot a $\bar{\varphi} = 2\pi$ metszetben kapjuk, értéke 44.11 MPa , 3D-nél 48.29 MPa . A teljes modell felületén 3D-s megoldásánál a 28. ábra mutatja annak megoszlását. Természetesen az “also” hierachikus modellek a dinamikai peremfeltételeket rosszul elégítik ki. Jó eredményeket csak a $h3$ feletti modellek szolgáltatnak.

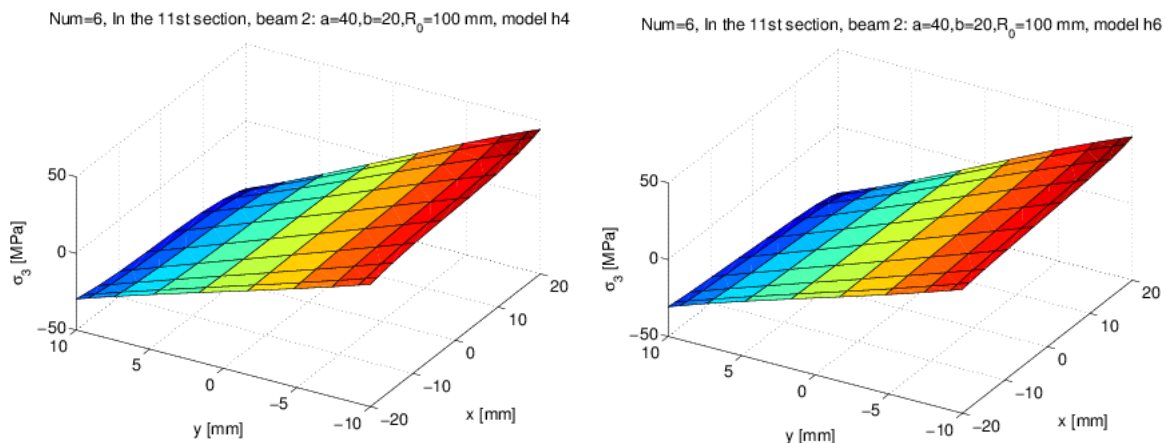


28. ábra. σ_{eq} redukált feszültség megoszlása az 5. terhelésnél (3D modell).

Terhelés 6:

Ennél a terhelésnél a Z irányban hat az alsó felületen $\sigma_y = -0.25 \text{ MPa}$ megoszló terhelés.

A test elmozdulása hasonló a 2. terhelésnél kapottakhoz, azaz eredeti síkjából kilépnek a pontok Z irányába. A rúdeleméletnél használatos fogalmakkal x tengely körüli hajlítás, s tengely körüli csavarás és y irányú nyírás lép fel, az s mentén változó értékekkel. Ezek közül a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben a σ_3 lefutását láthatjuk, a $\bar{\varphi} = 5\pi/2$ metszetben a redukált feszültség megoszlása van ábrázolva a 29. ábrán.

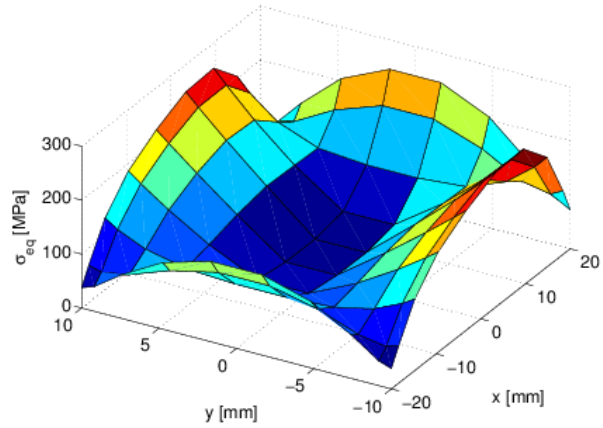


29. ábra. σ_3 feszültség megoszlása a 6. terhelésnél (modell $h4, h6$) a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben.

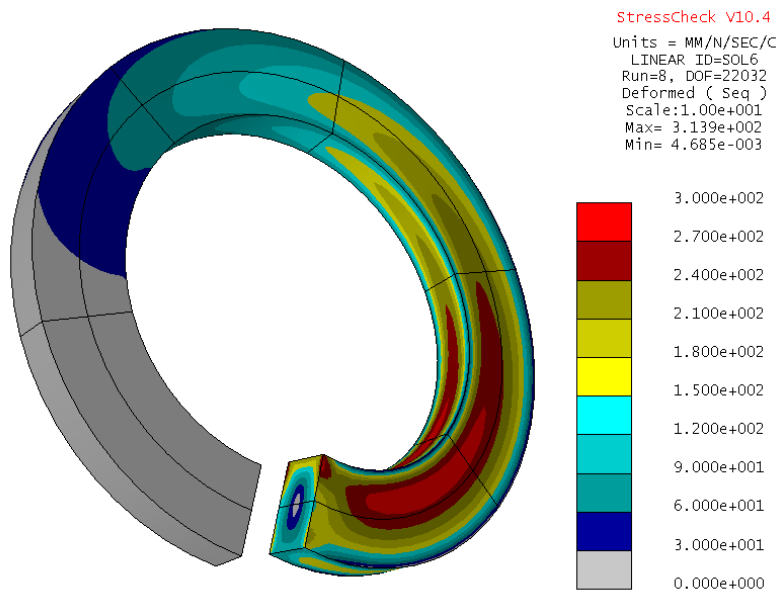
Ennél a terhelésnél a befalazásnál keletkezik a legnagyobb redukált feszültség a keresztmetszet elmozdulásának megakadályozása miatt. Itt minden a modell pontjában az elmozdulás zérusnak van felvéve. A $h6$ -os modellünk 290 MPa maximális értéket szolgáltat (lásd 32. ábra), míg a 3D-s modell 314 MPa -t.

A 30. ábra a $\bar{\varphi} = 5\pi/2$ metszet σ_{eq} megoszlását tünteti fel, a 31. ábra a 3D-s modell eredményét mutatja a teljes szerkezet látható felületén. A maximális redukált feszültség a befalazás belső sarokpontjaiban lép fel. Láthatóan a $h6$ -os modell és a 3D-s modell eredményei igen közel vannak egymáshoz, jól igazolva, hogy a hierachikus megközelítések sorozata biztosan konvergál a 3D-s hez.

Num=6, In the 11st section, beam 2: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

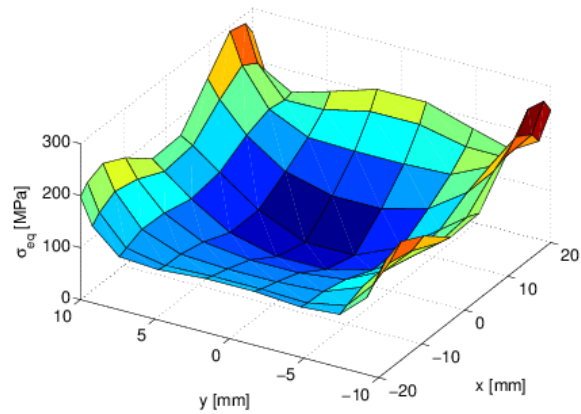


30. ábra. σ_{eq} redukált feszültség megoszlása a 6. terhelésnél a $\bar{\varphi} = 5\pi/2$ metszetben (modell h6).



31. ábra. σ_{eq} redukált feszültség megoszlása a 6. terhelésnél (3D modell).

Num=6, In the 11st section, beam 2: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6



32. ábra. σ_{eq} redukált feszültség megoszlása a 6. terhelésnél, h6 modellnél a befalazási keresztmetszetben.

3.3 Prizmatikus rúd és görbe tartó változó anyagállandók esetén

Tételezzük fel, hogy a rúd keresztmetszetében a Young modulus x irányában változik, nevezetesen

$$E = E(x) = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{(a/2)^m} |x|^m \quad (63)$$

ahol E_1 a keresztmetszet középhez tartozó Young modulus, míg E_2 a széleken mért érték. Itt m a változás merevedségével kapcsolatos.

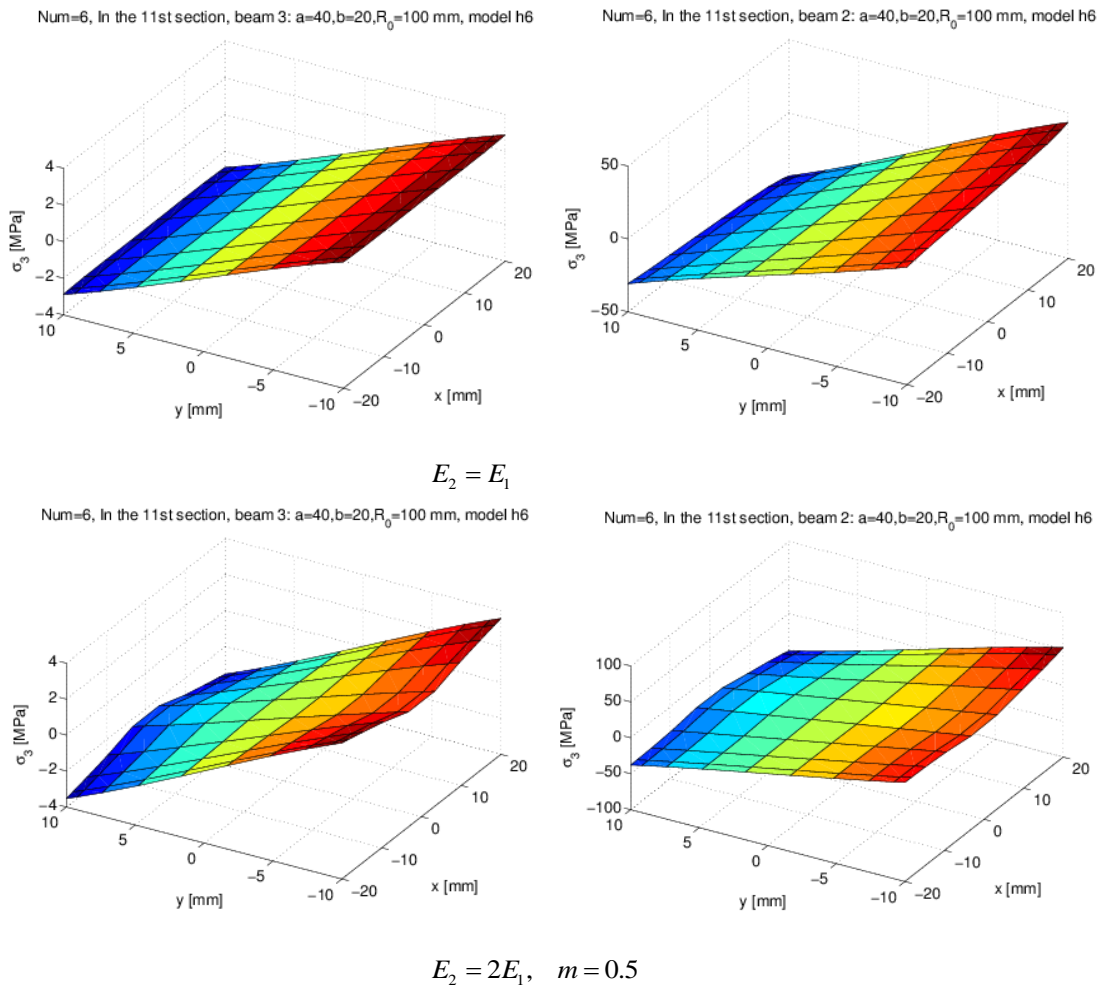
Számításainkban $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_2 = 2E_1$. Különböző m értékeinél kapott elmozdulások és feszültségek természetesen jelentősen különböznek az $E_2 = E_1$ hez tartozó esethez képest. A ν Poisson-féle számot állandóak tekintjük, $\nu = 0.3$. Megjegyezzük $m \Rightarrow \infty$ -nál $E \Rightarrow E_2$.

A térbeli feszültségállapotban a \mathbf{D} anyagállandók mátrixának elemei izotróp esetben

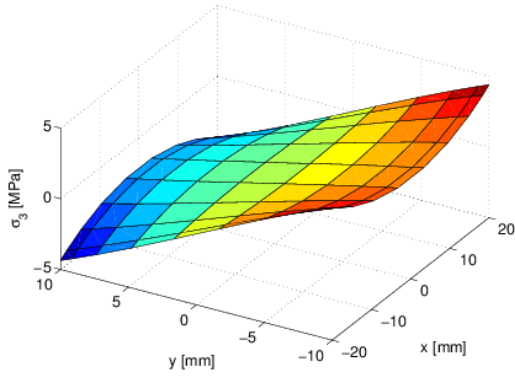
$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$D_{44} = D_{55} = D_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (64)$$

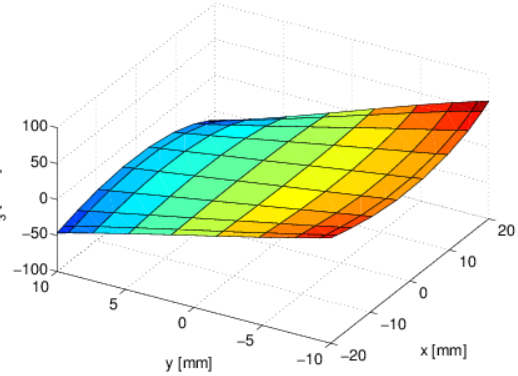
A 6. terhelési esetet kiragadva a σ_3 feszültség megoszlását fogjuk bemutatni, prizmatikus tartónál a $Z=L/4$ helyen, a görbe tartónál $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben.



Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

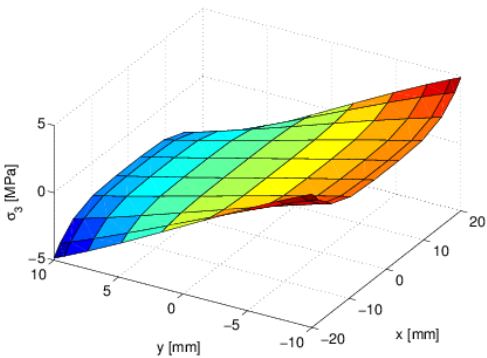


Num=6, In the 11st section, beam 2: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

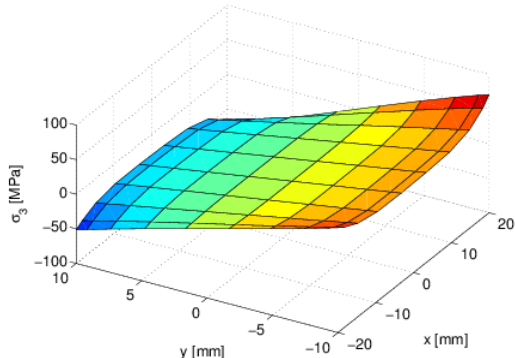


$$E_2 = 2E_1, \quad m = 2$$

Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

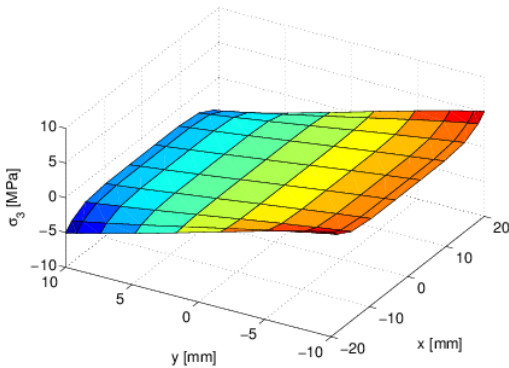


Num=6, In the 11st section, beam 2: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

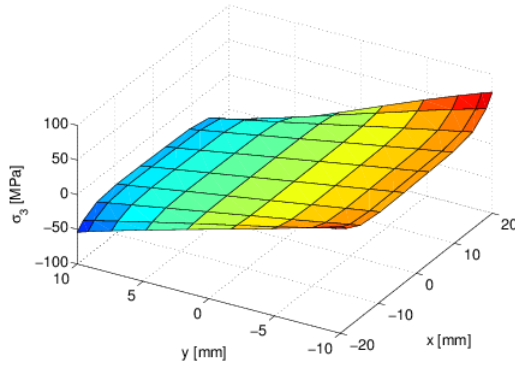


$$E_2 = 2E_1, \quad m = 4$$

Num=6, In the 11st section, beam 3: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6



Num=6, In the 11st section, beam 2: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6



a)

$$E_2 = 2E_1, \quad m = 6$$

b)

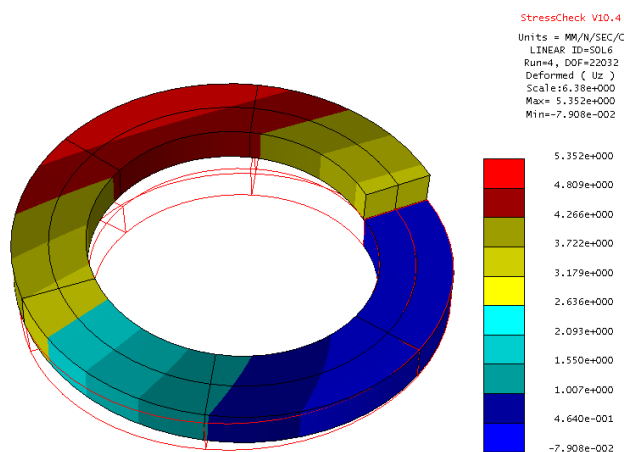
33. ábra. σ_3 feszültség megoszlása a 6. terhelésnél, h6 modellnél, a) prizmatikus tartó $Z = L/4$ metszetében, ill. b) a görbe tartó $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetében különböző anyagállandók esetén.

A feszültség az $E_2 = 2E_1$, $m = 0.5$ től kezdődően m növelésével a széleken a $\pm a/2$ helyeken megemelkedik. Az is látszik, egy adott x helyen y irányban a feszültség változása lineáris. Mivel az anyagtulajdonság megváltozása miatt a szerkezet merevsége csökken az $E_2 = 2E_1$, $m = 0.5$ állapothoz képest, a tartó végi keresztmetszet súlypontjának elmozdulása növekszik, lásd 4. táblázat.

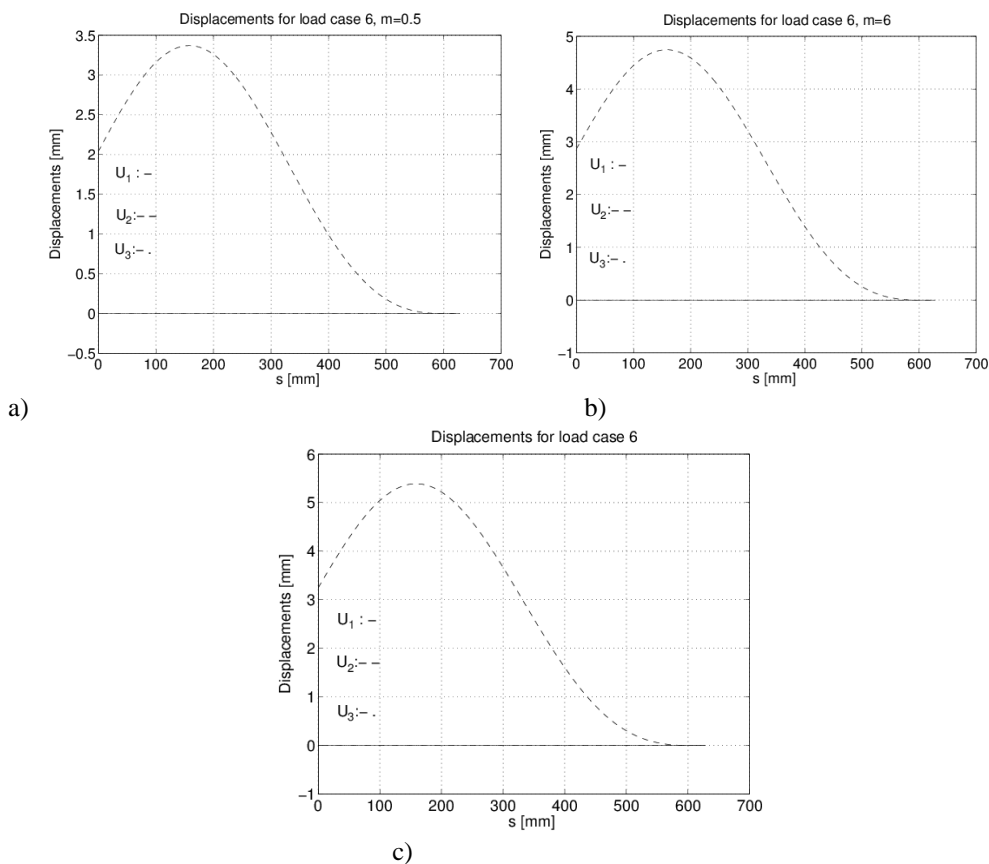
$E_2 = 2E_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$m = 0.5$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 6$
Prizmatikus u_y [mm]	-0.086	-0.1067	-0.1186	-0.1422
Görbe tartó u_z [mm]	2.039, 3D:2.20	2.512, 3D:2.8	2.754, 3D:3.1	2.864, 3D:3.12
Max u_z [mm]	3.35, 3D: 3.71	4.3, 3D: 4.676	4.5, 3D: 5.14	4.75, 3D: 5.35

4. táblázat: Változó anyagállandónál fellépő tartó végi elmozdulások a 6. terhelésnél.

A függőleges elmozdulást személhetjük a 3D-s megoldásnál, ill. a $h6$ -os modellnél a 34. és a 35. ábrákon.



34. ábra. 6. terhelésnél $m=6$ esetben a függőleges elmozdulás megoszlása a 3D-s megoldásnál.

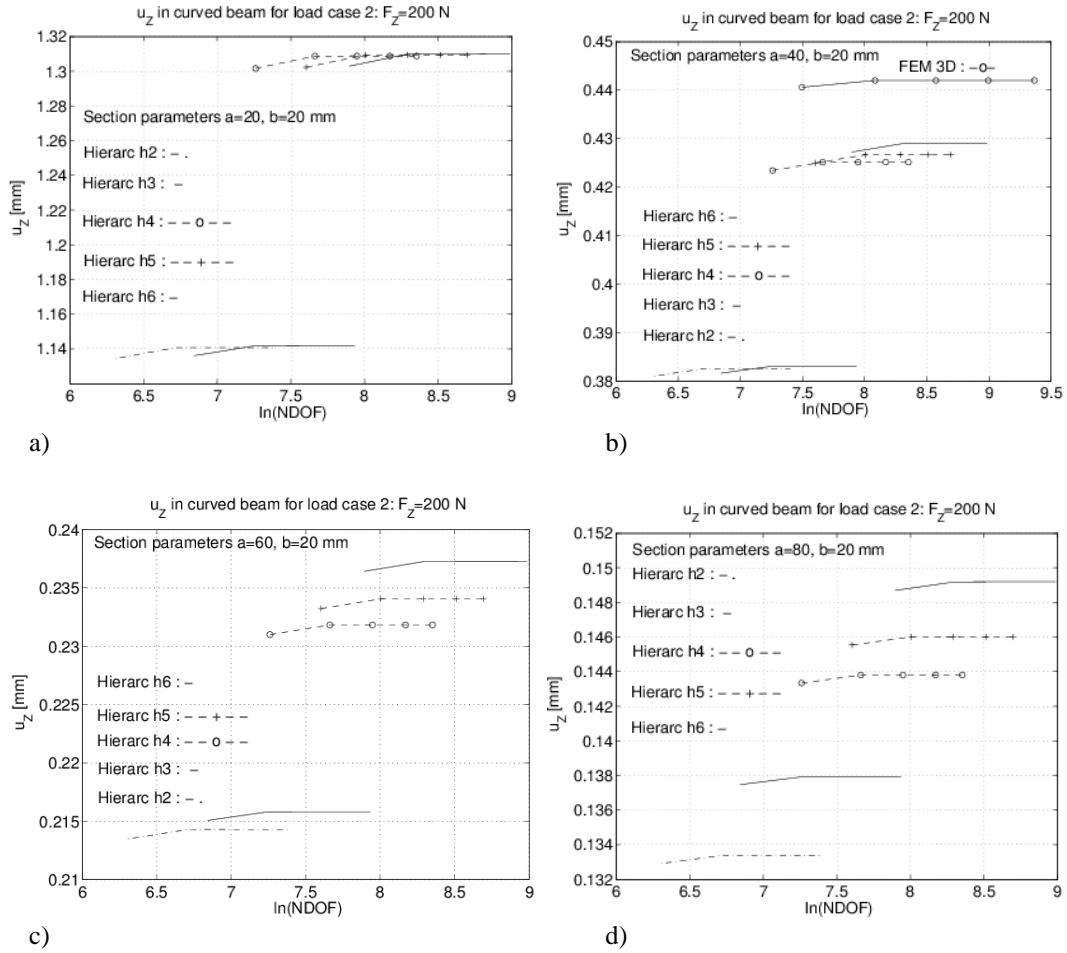


35. ábra. 6. terhelésnél: a) $m=0.5$, b) $m=6$ esetben, c) $E_2 = E_1$ esetben a függőleges elmozdulás (U_2) megoszlása a $h6$ -os modellnél a középvonalon.

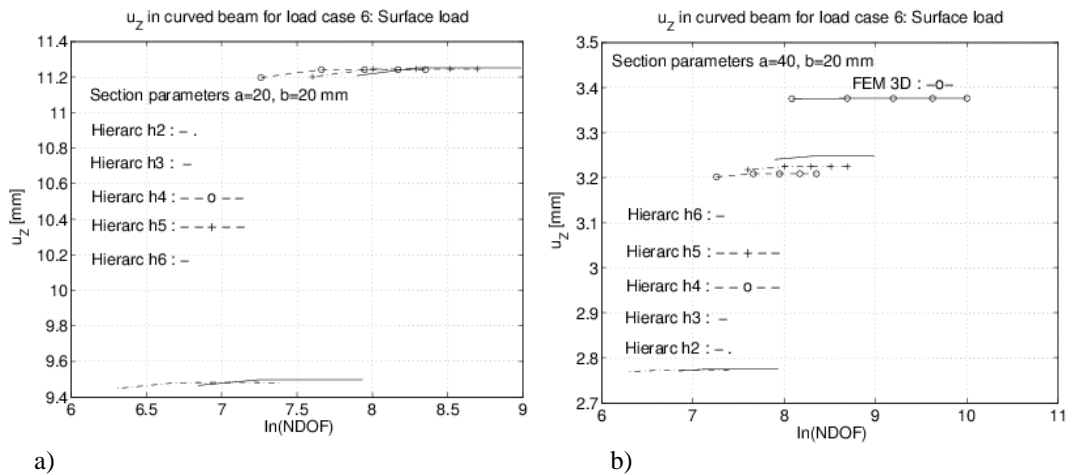
3.4 Különböző rúdkeresztmetszet hatása

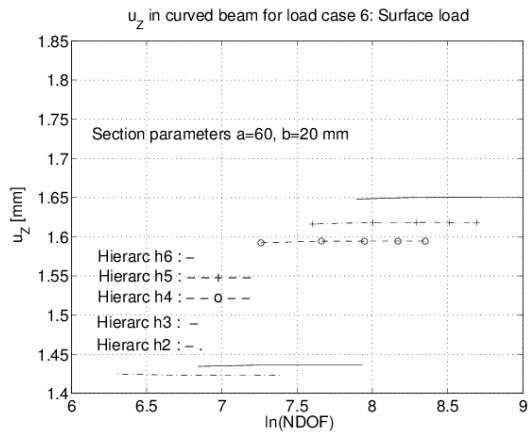
Nézzük meg a fent vizsgált testet $a = 20, 40, 60, 80 \text{ mm}$ keresztmetszet alapjának méreteinél.

Az elvégzett számítások konvergencia diagramjait az alábbi ábrák tartalmazzák. Mindegyik esetben a 3D-s megoldás szolgáltatja a legnagyobb elmozdulást, a hierarchiai szint emelésével közeledünk a 3D-s megoldáshoz.

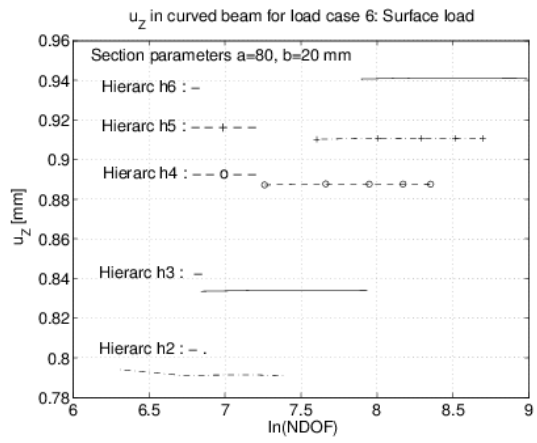


36. ábra. Konvergencia diagramok a 2. terhelésnél, a) $a = 20 \text{ mm}$, b) $a = 40 \text{ mm}$, c) $a = 60 \text{ mm}$, d) $a = 80 \text{ mm}$.





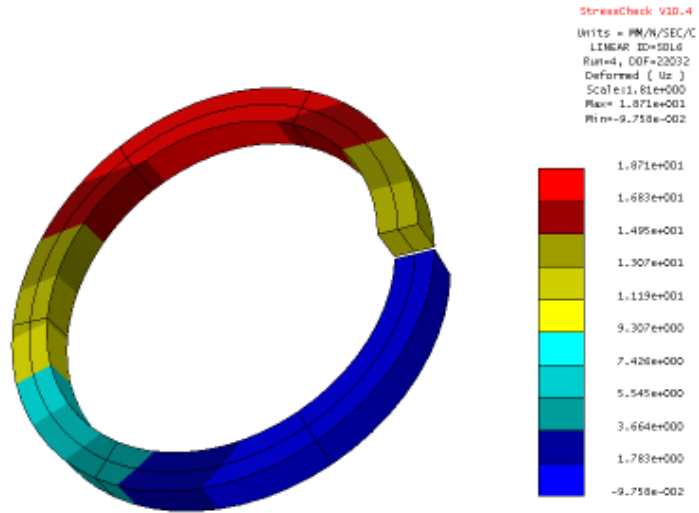
c)



d)

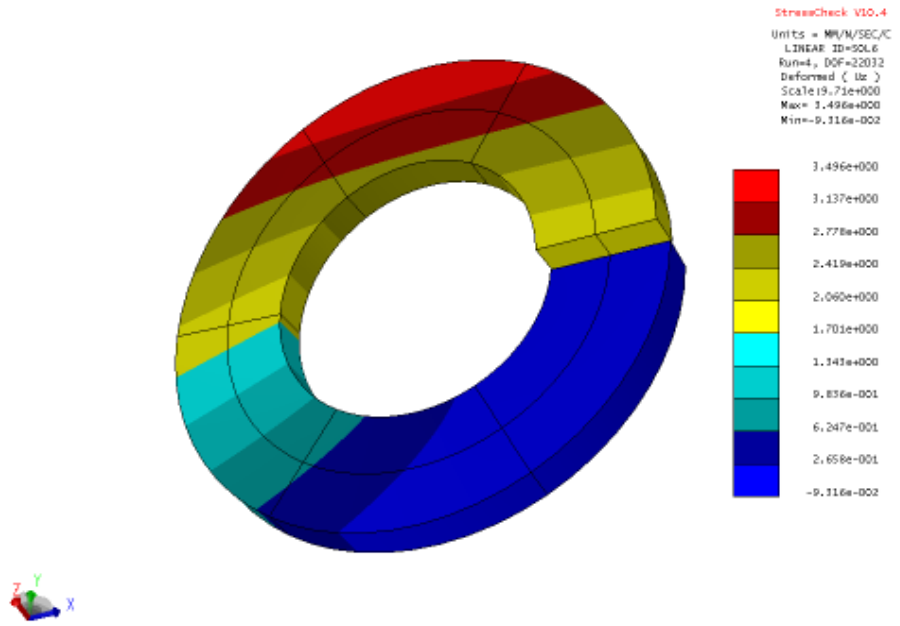
37. ábra. Konvergencia diagramok a 6. terhelésnél, a) $a = 20 \text{ mm}$, b) $a = 40 \text{ mm}$, c) $a = 60 \text{ mm}$, d) $a = 80 \text{ mm}$.

Load case 6
 $a = 20$



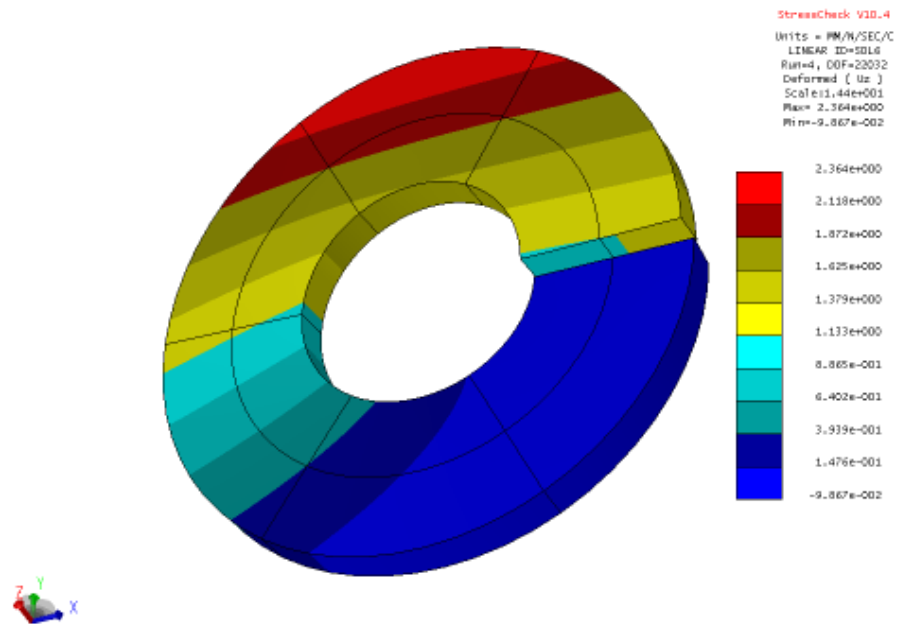
a)

Load case 6
a = 60



b)

Load case 6
a = 80



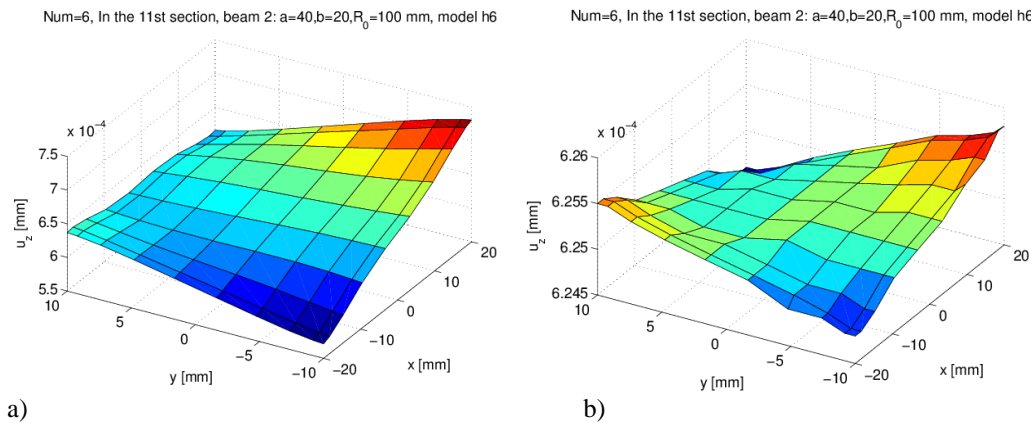
c)

38. ábra. A 6. terhelés u_z elmozdulása 3D-s megoldásnál, a) $a = 20 \text{ mm}$, b) $a = 60 \text{ mm}$, c) $a = 80 \text{ mm}$.

3.5 Rugalmas Winkler típusú ágyazás figyelembevétele

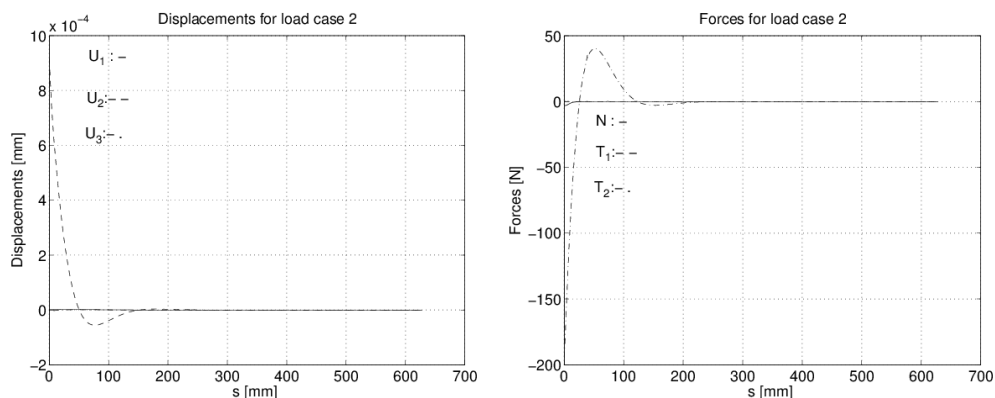
Vizsgáljuk a gyűrűalkú testet, a 2. és a 6. terhelésnél. Feltételezzük, hogy a $y = b/2$ felületen $c = 400 \text{ mm/MPa}$ nagyságú Winkler típusú ágyazás helyezkedik el. Láttuk a 2.6 alatt, hogy a végeelem merevségi mátrixához a (66) alatti C mátrixot kell hozzáadni.

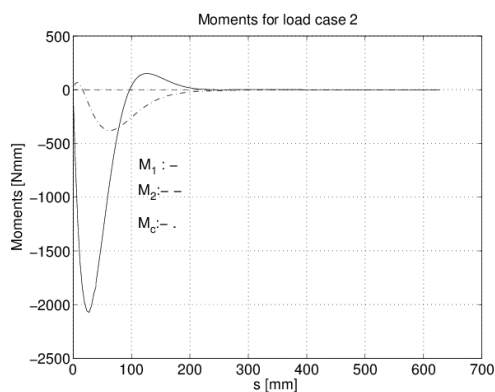
Megvizsgáltuk azt az esetet is, amikor a rugalmas testet teljes gyűrűnek tételeztük fel. Ekkor, az E, ν véges értékei miatt a gyűrű vastagsága mentén összenyomódik és így nem kapunk a terheléssel $p_y = 0.25 \text{ MPa}$ azonos érintkezési nyomást a Winkler típusú közeg és a gyűrű között. Ha a gyűrű merev volna, akkor az érintkezési nyomás $p_{kont} = p_y = cu_2$, azaz $u_2 = 0.625 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. Jelen esetben rugalmas gyűrűvel számolva, a kialakuló $u_z = u_2$ megoszlását a $\bar{\varphi} = 3\pi/2, 2\pi$ metszetekben a 39. ábra mutatja. A sík középpontjában a $u_z = u_2 > 0.625 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. Megnövelve E értékét, a 39b. ábra mutatja az $u_z = u_2$ megoszlását, ami láthatóan tart a merev gyűrűnél elvileg kapni szükséges állandó $u_2 = 0.625 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ értékhez.



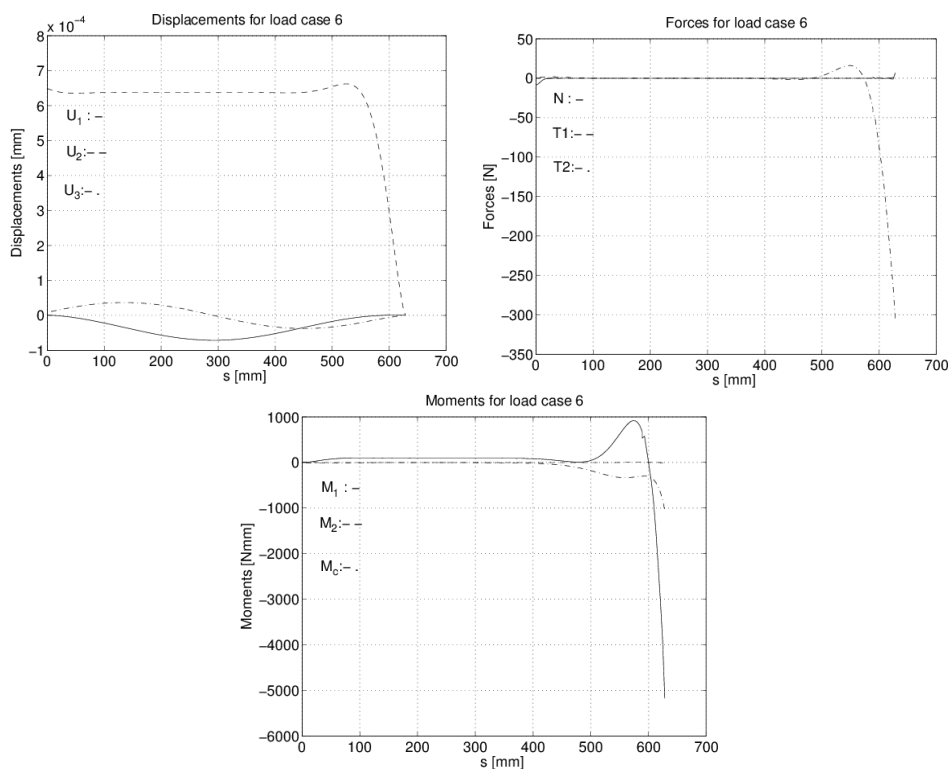
39. ábra. A gyűrű vastagságmenti elmozdulásának megoszlása ($x = 20$ a belső sugárhoz tartozik),
a) $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0.3$, b) $E = 2 \cdot 10^7 \text{ MPa}, \nu = 0.3$.

A 2. terhelésnél kialakuló függőleges elmozdulást, a nyíróerőt, a hajlítónyomatékot a 40. ábra, míg a 6. terhelésnél a 41. ábra mutatja be. Jó látjuk a peremzavarás hatásának elhalását, ami jól ismert a Winkler típusú ágyazással bíró szerkezetekre. Itt az 1,2,3 index a helyi görbevonalú koordinátarendszerben értelmezett mennyiségekre utal. Jól látszik, hogy az $M_c = M_3$ csavarónyomaték a 2. terhelésnél zérusról elindulva, emelkedik, majd elhal, míg a 6. terhelésnél a befalazásnál éri el a legnagyobb értékét. Az M_1 hajlítónyomaték mindkét terhelésnél számottevő. Az 5. terhelésnél a terhelés $\bar{\varphi} = \pi$ síkon való bevitele jelentős zavarást okoz, ezt a 6. terhelésnél a befalazás okozza. A 6. terhelésnél végig a középvonal mentén a függőleges elmozdulás pozitív, így a kétoldalú kapcsolatosnak feltételezett Winkler közeg nem válik el a gyűrűtől, végig nyomva van. A 2. terhelésnél ez már nem áll fenn. Kb. 50 mm-től kezdődően a normálirányú (Z irányú) elmozdulás egy kis szakaszon negatív, vagyis a pontos megoldáshoz a testek között egyoldalú kapcsolatot feltételező megoldást kell alkalmazni [17]. Erre itt nem térünk ki.





40. ábra. A gyűrű középvonalának elmozdulása, az eredő belső erők és nyomatékok megoszlása a középvonal mentén a 2. terhelésnél.



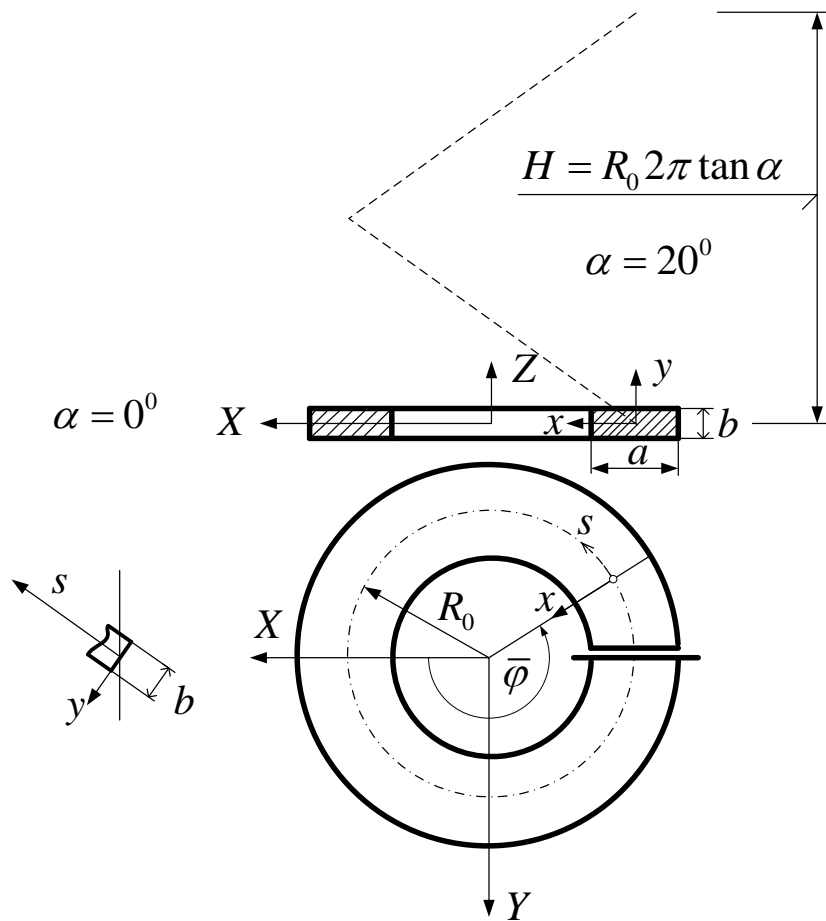
41. ábra. A gyűrű középvonalának függőleges elmozdulása, az eredő belső erők és nyomatékok megoszlása a középvonal mentén a 6. terhelésnél.

3.4 Csavar rugó példája (42. ábra)

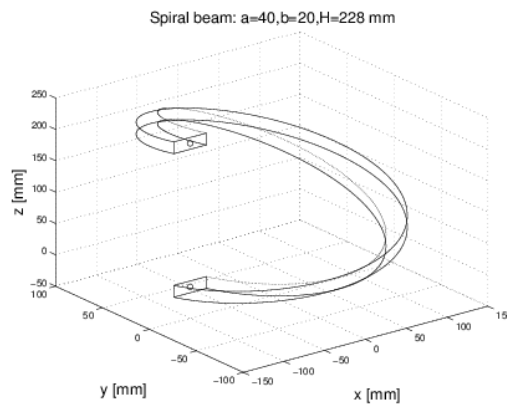
Anyagállandók azonosak a korábbi testekkel megadottakkal, azaz Young modulus $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, Poisson szám $\nu = 0.3$, azaz az anyag lineárisan rugalmas, homogén, izotróp.

Geometriai adatok: $R_0 = 100 \text{ mm}$, $a = 40 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$. Rugó menetemelkedése $H = 2\pi \cdot R_0 = 228.68 \text{ mm}$, ami $\alpha = 20^\circ$ -os emelkedési szöghöz tartozik. Terheléseket az 5. táblázat foglalja magába.

Koncentrált erők és nyomatékok működhetnek a spirál rúd $\bar{\varphi} = \pi$ metszetében annak súlypontjában. (1-3 terhelési esetek). Itt kétfajta módon képzeljük el a terhelést: 1/ koncentrált erő ill.nyomaték formájában, ill. 2/ a helyi görbevonalú x, y, s koordináta-rendszerben értelmezett felületen megoszló terhelés alakjában. A nyomaték lineáris normálfeszültségen keresztül számítható, a koncentrált erők pedig parabolikus megoszlás szerinti felületi terheléssel veendő figyelembe. Látni fogjuk, hogy a kétfajta terhelés ugyanazt az eredményt adja.



a)



b)

42. ábra. Csavar rugó geometriája, a) a globális XYZ koordinátarendszer, ill. a lokális xys koordinátarendszer, b) térbeli elhelyezkedése (a $\bar{\varphi} = 3\pi$ (felső) sík befalazott, az alsó sík terhelt).

Terhelés jele	F_x [N]	F_z [N]	M_x [Nmm]
1			5000
2		200	
3	-100		

5. táblázat: $\bar{\varphi} = \pi$ síkon ható terhelések

Egyszerűsített modellekkel különböző α szögeknél a 6. táblázatbeli eredményhez jutunk. Itt $\alpha = 0$ és $\alpha = 20$ foknál a 3D-s eredmény is fel van tüntetve.

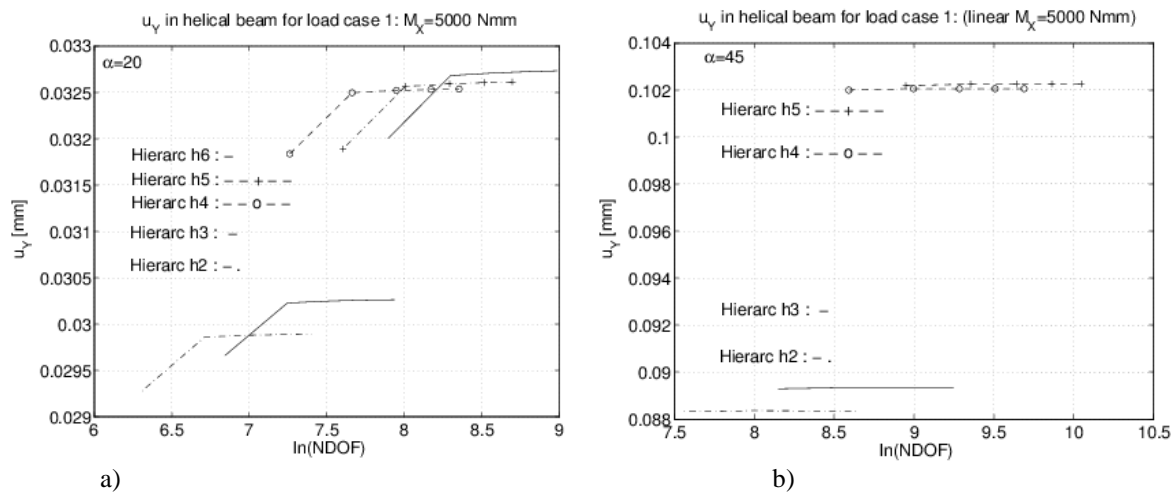
		F_z	$F_z = 200 N$	F_z	F_x	$F_x = -100 N$	F_x
	α [fok]	u_x [mm]	u_y [mm]	u_z [mm]	u_x [mm]	u_y [mm]	u_z [mm]
Rudelmélet	0	0	0	0.4613	-0.0147	0	
	10	-0.1266	0.0546	0.4701	-0.0611	0	
	20	-0.2590	-0.1122	0.4979	-0.2153	0	
Kirchhoff (it20)	0	0	0	0.4526	-0.0202	0	0
	10	-0.1276	-0.0822	0.4527	-0.0074	-0.0004	0.0638
	20	-0.2674	-0.1663	0.4511	-0.2294	-0.0035	0.1337
Timoshenko- I rúdmodell: h0 (it21)	0	0	0	0.3232	-0.0144	0	0
	10	-0.0397	-0.00117	0.2992	-0.0228	0.0017	0.01984
	20	-0.0572	-0.00222	0.2866	-0.0410	0.0060	0.02859
Timoshenko- II: h1 (it22)	0	0	0	0.2591	-0.0109	0	0
	10	-0.0332	-0.0264	0.2496	-0.0178	0.0014	0.0166
	20	-0.0532	-0.0045	0.2489	-0.0343	0.0054	0.0265
3D (VEM)	0	0	0	0.4420	-0.0151	0	0
	20	-0.2654	-0.167	0.4415	-0.2247	0.0037	0.1327

6. táblázat: Fontosabb elmozdulások különböző elmélet szerint számolva, a 2. és 3. terhelésnél.

Jól látható, hogy klasszikus rudelmélet alapján levezetett (Betti tétel segítségével) eredményekhez közel állnak a Kirchhoff elmélet szerint felépített végeselemes számításokhoz. Amint már korábban is említettük, a *h1* hierarchikus modell a térbeli feszültségállapot feltételezésével dolgozik, de az elmozdulásmező approximációja ezt még nem tudja biztosítani, és ilymódon lényegesen kisebb értékeket kapunk, mint a 3D-s megoldás. A rudelméleti eredményeknél a csavarási merevséget az egyenes rudak Saint-Venant féle csavarási feladatának megoldásából vettük [18,19].

A hierarchikus modellezés néhány eredménye az alábbi részben található meg.

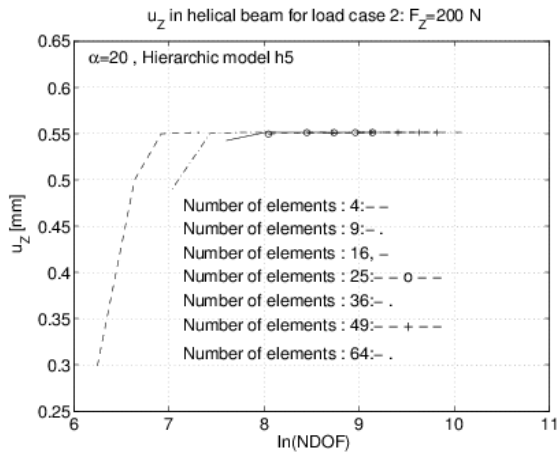
Terhelés 1:



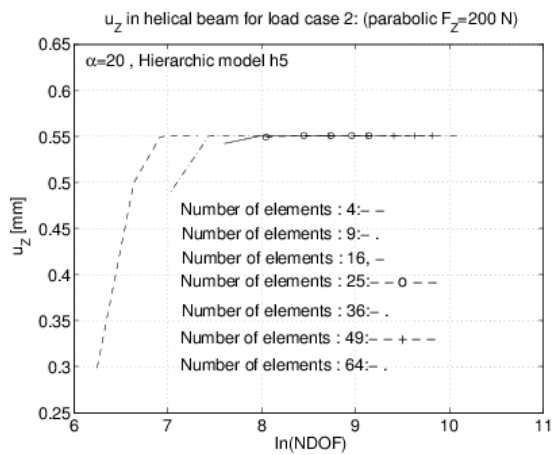
43. ábra. Az 1. terheléshez tartozó konvergencia diagram; a) koncentrált nyomaték, b) a véglapon lineárisan megoszló s irányú terhelés működik, amelynek eredője $M_x = 5000 \text{ Nmm}$. Az eredmények 16 elemes $p=2-6$ -os megoldáshoz tartoznak

A többi diagramnál a c), d)-s diagramok 16 elemes $p=2-6$ -os megoldáshoz tartoznak.

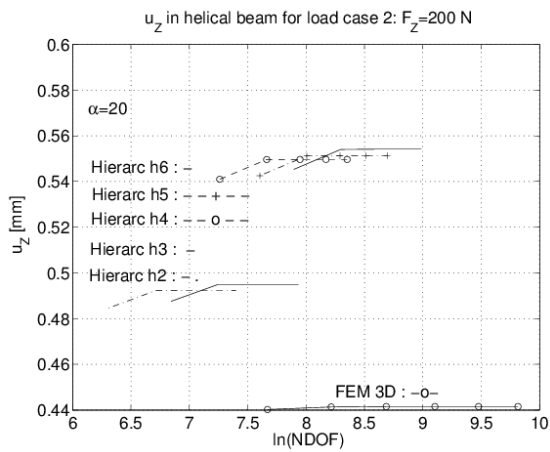
Terhelés 2:



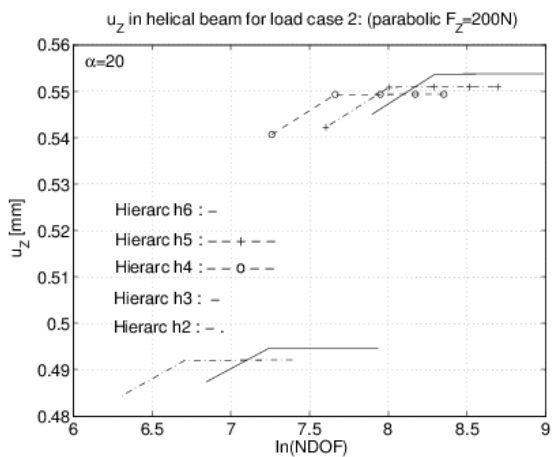
a)



b)



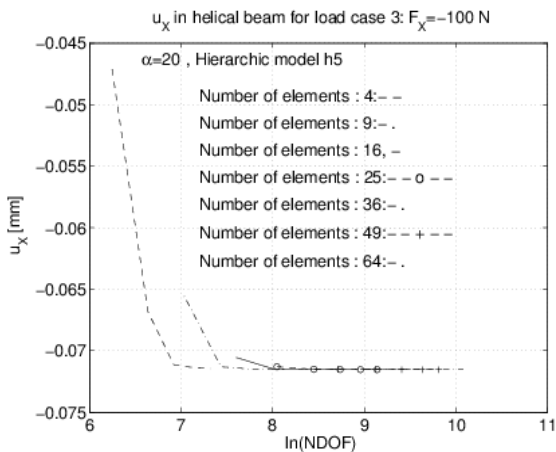
c)



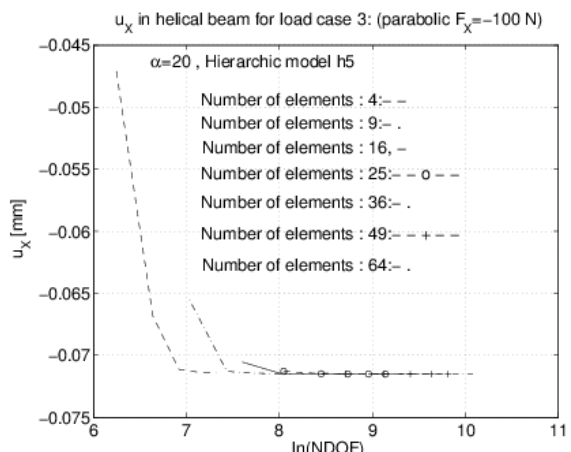
d)

44. ábra. A 2. terheléshez tartozó konvergencia diagram; a), c) koncentrált erő, b), d) a véglapon parabolikusan megoszló Z irányú terhelés működik, amelynek eredője $F_z = 200$ N .

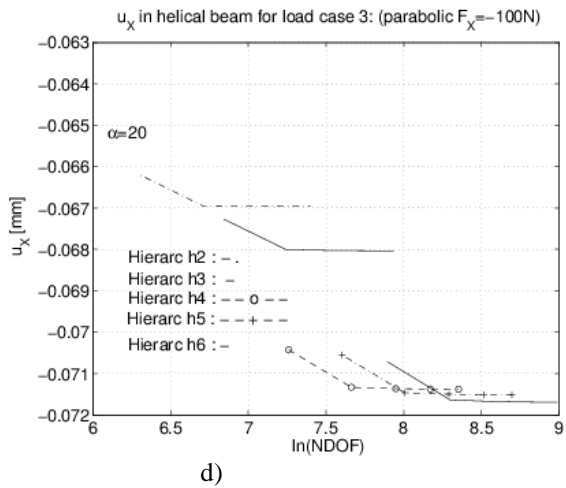
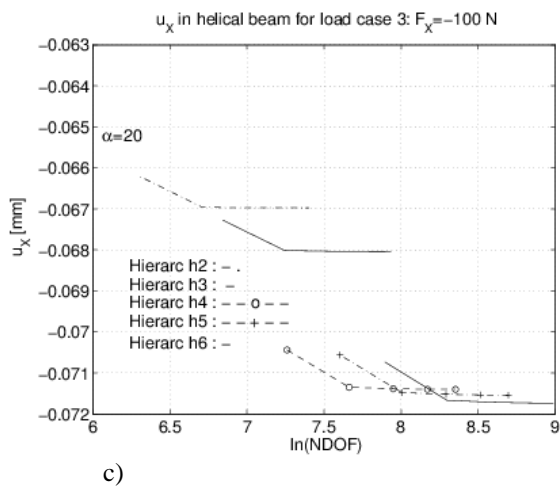
Terhelés 3:



a)



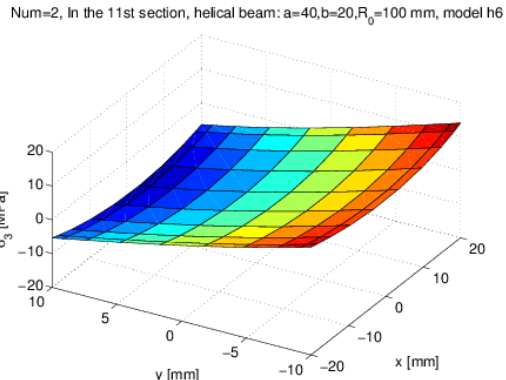
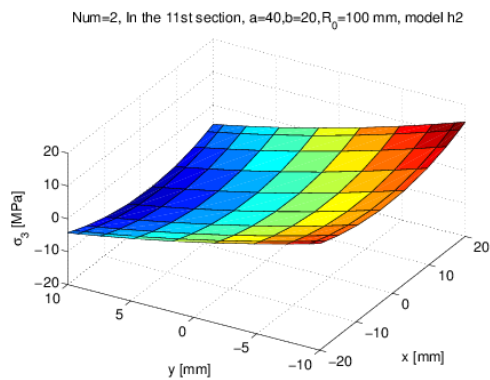
b)



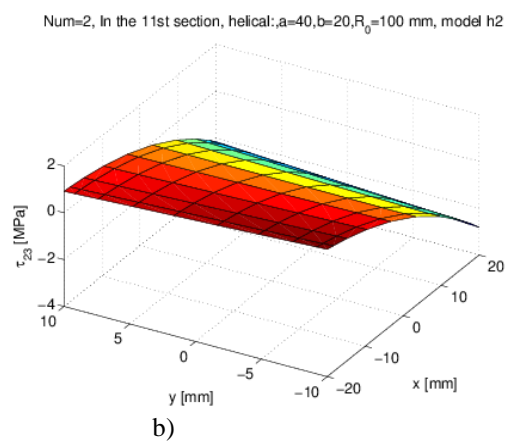
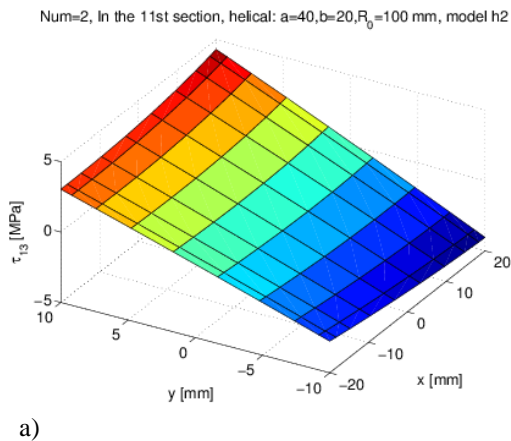
45. ábra. A 3. terheléshez tartozó konvergencia diagram; a), c) koncentrált erő, b), d) a véglepon parabolikusan megoszló $-X$ irányú terhelés működik, amelynek eredője $F_x = -100N$.

A fenti eredményekből következik, hogy a keresztmetszet súlypontjának elmozdulása a koncentrált terheléseknél és a keresztmetszetben 1. terhelésnél y -ban lineárisan, a 2. terhelésnél y -ban négyzetesen, a 3. terhelésnél x -ben négyzetesen megoszló (a koncentrálttal azonos eredőket adva) terheléseknél gyakorlatilag azonosak. A másik eredmény, hogy a 44a,b; és a 45a,b diagramokból láthatóan elegendő a 16 elemre felbontott testet vizsgálni, a további sűrítés az elmozdulások azonos konvergenciáját adja. E miatt használtuk a 16 elemes felosztást a különböző hierarchikus modellek konvergenciájának számításánál, lásd 43-45 c, d diagramokat. Az alább kinyomtatott feszültségmegoszlások a $\varphi = 3\pi/2$ síkban értendők.

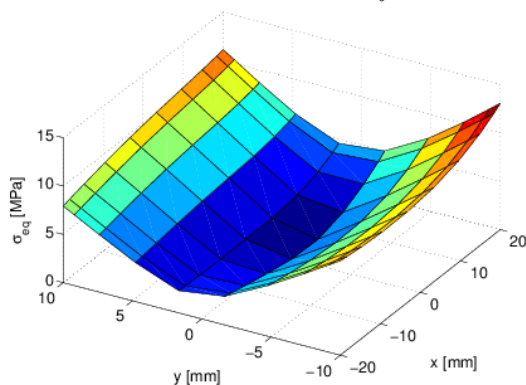
Terhelés 2:



45. σ_3 feszültség megoszlása a 2. terhelésnél (modell h2, h6).



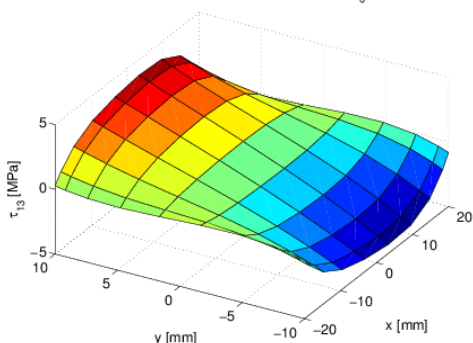
Num=2, In the 11st section, helical: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h2



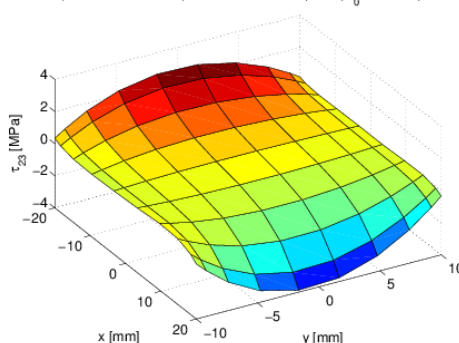
c)

46. τ_{13} , τ_{23} és σ_{eq} feszültségek megoszlása a 2. terhelésnél (modell h2) a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben.

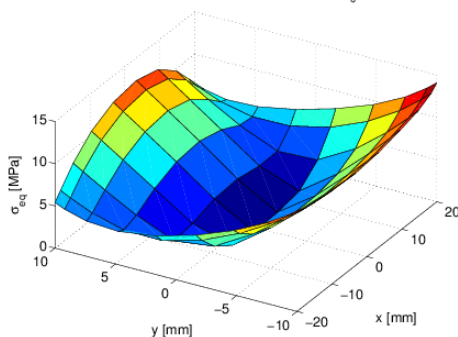
Num=2, In the 11st section, helical beam: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6



Num=2, In the 11st section, helical beam: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6



Num=2, In the 11st section, helical beam: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

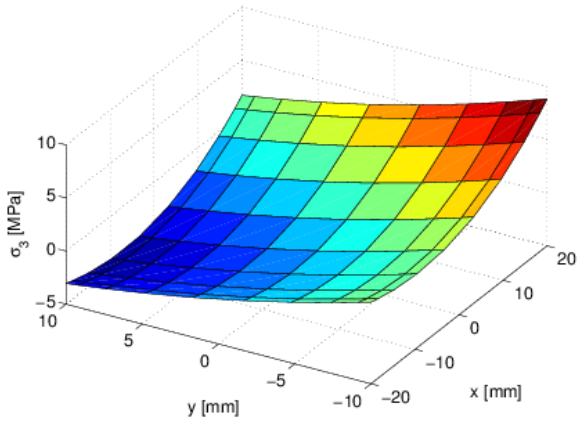


47. τ_{13} , τ_{23} és σ_{eq} feszültségek megoszlása a 2. terhelésnél (modell h6) a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben.

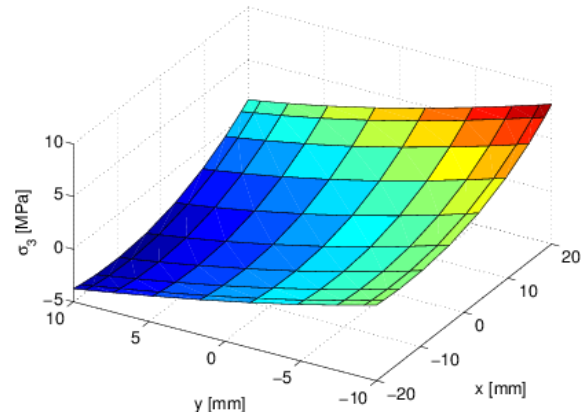
A kérdéses keretszmetben a nyírófeszültségek a –a rúdelmélet terminológiáját használva, nyírásból és csavarásból származnak. A h2-es modell igen rosszul adja ki a nyírófeszültségeket ugyanis a pontos megoldásnál a τ_{13} az $x = \pm 20$ peremeken, míg a τ_{23} a $y = \pm 10$ peremeken zérus kell legyen. A h6-os modell ezt igen jól megközelíti. Mivel a σ_3 feszültséget mindkét modell jól adja ki, a redukált feszültségekben nincs nagy eltérés. A h6-os modellnél a redukált feszültség maximuma ebben a metszetben $\sigma_{eq} = 11.71 MPa$ (3D modell $\sigma_{eq} \approx 14 MPa$), míg a $\bar{\varphi} = 2\pi$ metszetben $\sigma_{eq} = 18.96 MPa$, 3D-nél $\sigma_{eq} = 20.54 MPa$.

Terhelés 3:

Num=3, In the 11st section, a=40,b=20,R₀=100 mm, model h2

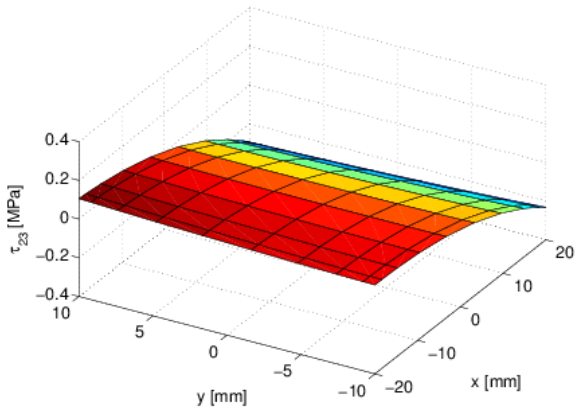


Num=3, In the 11st section, helical beam: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6



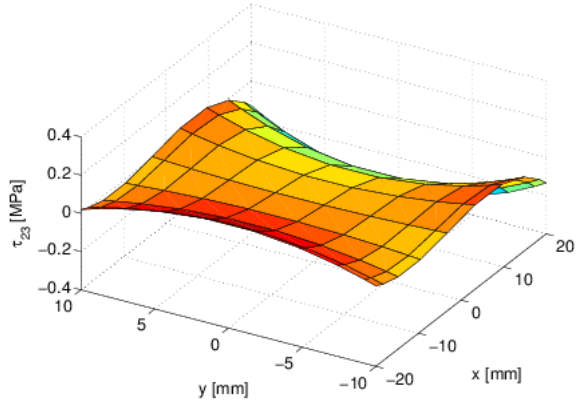
48. σ_3 feszültség megoszlása a 3. terhelésnél (modell h2, h6).

Num=3, In the 11st section, helical: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h2



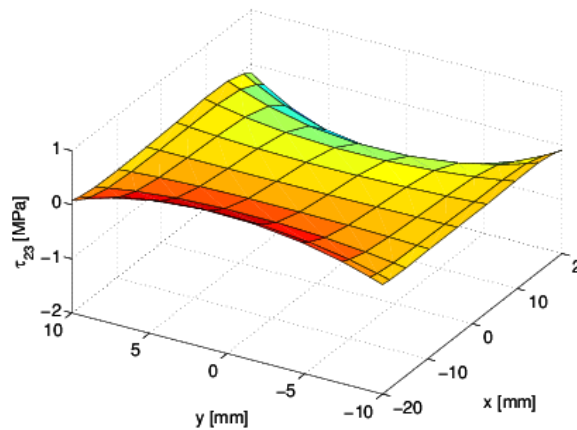
a)

Num=3, In the 6st section, helical: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h4



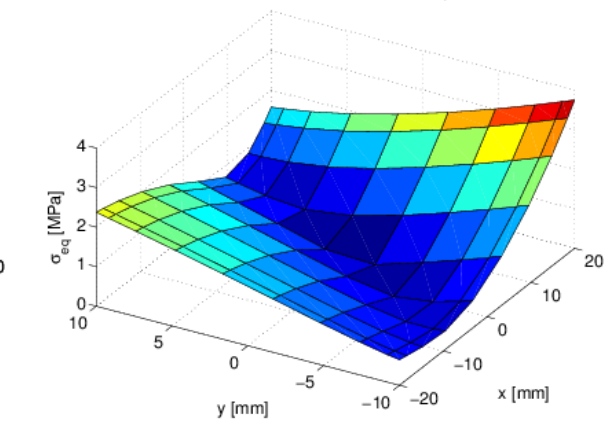
b)

Num=3, In the 11st section, helical beam: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h6

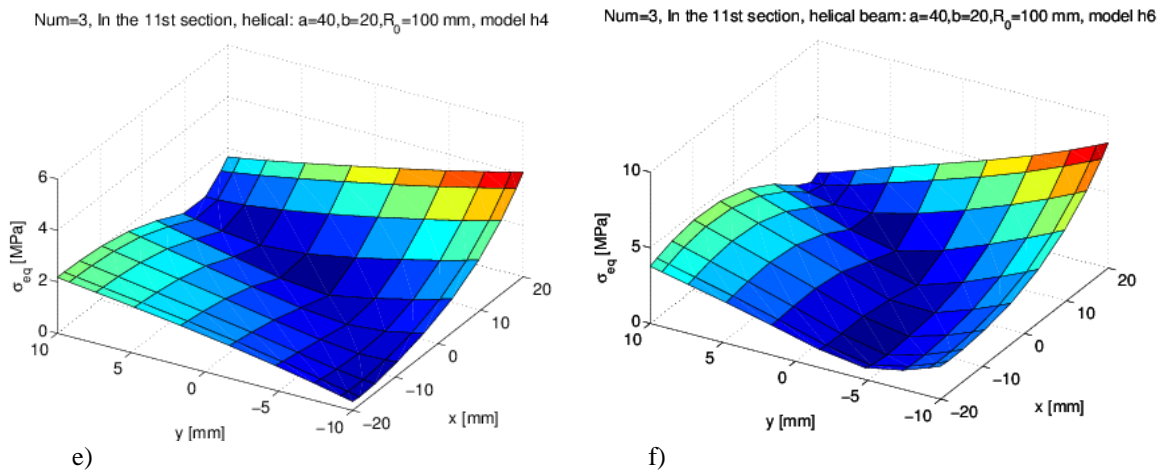


c)

Num=3, In the 11st section, helical: a=40,b=20,R₀=100 mm, model h2



d)



49. τ_{23} és σ_{eq} feszültségek megoszlása a 3. terhelésnél (modell $h2$, $h4$, $h6$) a $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ metszetben.

A 49. Diagramból jól látható, hogy az alacsony hierarchikus $h2$ modell még jelentős hibával adja ki a nyírófeszültségeket, ez a redukált feszültségre is befolyással van. A $h4$ -es modell már jóval jobb, mint a $h2$, de még pontosítható. A bemutatott eredmények a $h6$ -nál közelítik meg a legjobban a 3 dimenziós modell megoldását. Ekkor, az $y = \pm 10$ peremeken egészen jól kielégül a zérus peremfeltétel a τ_{23} feszültségnél.

Következtetések

Térbeli középvonallal rendelkező rúdszerű alkatrészek rugalmasságtani megoldásának egy lehetséges útját vizsgáltuk, nevezetesen hogyan lehet a megoldást pontosítani un. Hierarchikus modellek felvételével. A vizsgálathoz a potenciális energia minimum elvre alapozott végesesemes közelítést választottuk oly módon, hogy az elmozdulásmezők az un. mezőfüggvények (field functions) és irányfüggvények (director functions) szorzatainak összegén keresztül nyernek közelítést. Az irányfüggvények a rúd keresztmetszetében felvett polinomoknak felelnek meg, megválasztásuk az un. Pascal háromszögben elhelyezett polinomok szerint történt. A kidolgozott számítógépi programban a legmagasabb polinom 6-od fokú. Ezzel a $h6$ -os hierarchikus modellhez jutottunk el. A mezőfüggvények úgy szintén polinomok, a p -verziós végesesemes közelítés szerint vannak felépítve. A csomóponti ismeretlenek a felvett összes polinomhoz tartoznak (ezekkel a hosszmenti lineáris közelítés érhető el), a belső paraméterekkel további hatványfüggvényeket lehet bevonni a közelítésbe. Programunkban maximum 6-od fokú közelítést érhetünk el.

Megadtuk a különböző hierarchikus szinthez tartozó végesesemek merevségi mátrixának, redukált terhelési vektorainak kiszámítási összefüggéseit. Konkrét feladatokon (prizmatikus rúd, síkbeli görberúd, csavar rugó) elvégzett számítások jól mutatják, hogy a hierarchikus szint emelésével kapott eredmények a 3D-s megoldáshoz konvergálnak. Külön figyelmet szenteltünk a dinamikai peremfeltételek kielégülési mértékének vizsgálatára. A prizmatikus rudaknál húzás, hajlítás-nyírás igénybevételnél, a véglapon ható terhelésnél a $h4$ -es hierarchikus szint már igen jó eredményeket ad, a felületen megoszló terhelésnél azonban el kell jutnunk a $h5$ -ös modellig, görberudaknál, ha csavarás is fellép, megnyugtató eredmények csak $h5$ - $h6$ -os szinteken érhetők el. A 3D-s megoldást a StressCheck számítógépi program szolgáltatta. A csavar rudak vizsgálatával kapott eredmények alapján megállapítható, hogy a pontosabb megoldásokhoz még magasabb hierarchikus szintek alkalmazása szükséges.

További új kutatási irányt jelent a jövőt tekintve, az egyoldalú kapcsolatok figyelembevétele az érintkezési feladatok témakörében.

Köszönetnyilvánítás A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

HIVATKOZÁSOK

- [1] S.S. ANTMAN: *Theory of rods*. Handbuch der Physik, Volume 6/2, pp. 641-703, Springer, 1962.
- [2] G.M. DAUGE, E. FAUN, Z. YOSIBASH: Plates and Shells: Asymptotic Expansions and Hierarchic models. In: E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, editor, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 199-236, John Wiley & Sons, 2004.

- [3] Y. KOUNTSAWA, G. GIUNTA, H. NASSER, S. BELOUTTAR: Static analysis of shear actuated piezo-electricbeams via hierarchical one-dimensional FEM theories, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22, 3-18, 2015, DOI: 10.1080/15376494.2014.907946
- [4] G. GIUNTA, S. BELOUTTAR, A.J.M. FERREIRA: A thermal stress finite element analysis of beam structures by hierarchical modelling, *Composites B: Part B, Engineering*, 95,179-195, 2016
- [5] E.CARRERA,G.GIUNTA: Refined beam theories based on a unified formulation. *Int. J. Appl. Mech.* 2, 117–143, 2010
- [6] E.CARRERA, G.GIUNTA, P.NALI, M.PETROLO: Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries. *Computers and Structures*, 88, 283–293, 2010
- [7] E.CARRERA, G.GIUNTA, M.PETROLO: *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*.Wiley-Blackwell, NewYork, 2011
- [8] L. HANTEN, G. GIUNTA, S. BELOUTTAR, V. SALNIKOV: Free vibration analysis of fibre-metal laminated beams via hierarchical one-dimensional models, *Hindawi Mathematical Problems in Engineering*, volume. 2018, Article ID 2724781, <https://doi.org/10.1155/2018/2724781>
- [9] A. PAGANI, E. CARRERA, and A.J.M. FERREIRA: Higher-order theories and radial basis functions applied to free vibration analysis of thin-walled beams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23, 1080–1091, 2016, <http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2015.1121555>
- [10] DINKH KIEN NGUYEN and VAN TUYEN BUI: Dynamic Analysis of Functionally Graded Timoshenko Beams in Thermal Environment Using a Higher-Order Hierarchical Beam Element, *Hindawi Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2017, Article ID 7025750, <https://doi.org/10.1155/2017/7025750>.
- [11] G. GIUNTA, S. BELOUTTAR, E.CARRERA: Analysis of FGM beams by means of classical and advanced theories. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 17, 622–635, 2010
- [12] G. GIUNTA, S. BELOUTTAR, A.J.M. FERREIRA: A static analysis of three-dimensional functionally graded beams by hierarchical modelling and collocation meshless solution method, *Acta Mech*, 227, 969-991, 2016, DOI:101007/100707-015-1503-3
- [13] Y. HUI, G. De PIETRO, G. GIUNTA S. BELOUTTAR, H. HU, E. CARRERA, A. PAGANI, Geometrically Nonlinear Analysis of Beam Structures via Hierarchical One-Dimensional Finite Elements, *Hindawi Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2018, Article ID 4821385, <https://doi.org/10.1155/2018/4821385>
- [14] B. SZABÓ, I. BABUSKA: *Introduction to Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
- [15] StressCheck, <https://esrd.com>
- [16] I. PÁCZELT, R. BELEZNAI: Nonlinear contact-theory for analysis of wire rope strand using high-order approximation in the FEM. *Computers and Structures* 89:1004-1025, 2011.
- [17] I. PÁCZELT: *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban*, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999.
- [18] In I.A. BIRGER, Y.G. PANOVKO editor, *Prochnost, ustoychivost,kolebanija*, Tom. 1. Izd. Mashinostroenie, Moskva, 1968
- [19] S.P. TIMOSHENKO: *Theory of elasticity* (In Russian), Publ. Naukova Dumka, Kiev, 1972

Appendix A: Pascal háromszög alatti függvények

1	<i>h</i> 1
<i>x</i> <i>y</i>	<i>h</i> 2
<i>x</i> ² <i>xy</i> <i>y</i> ²	<i>h</i> 3
<i>x</i> ³ <i>x</i> ² <i>y</i> <i>xy</i> ² <i>y</i> ³	<i>h</i> 4
<i>x</i> ⁴ <i>x</i> ³ <i>y</i> <i>x</i> ² <i>y</i> ² <i>xy</i> ³ <i>y</i> ⁴	<i>h</i> 5
<i>x</i> ⁵ <i>x</i> ⁴ <i>y</i> <i>x</i> ³ <i>y</i> ² <i>x</i> ² <i>y</i> ³ <i>xy</i> ⁴ <i>y</i> ⁵	<i>h</i> 6
<i>x</i> ⁶ <i>x</i> ⁵ <i>y</i> <i>x</i> ⁴ <i>y</i> ² <i>x</i> ³ <i>y</i> ³ <i>x</i> ² <i>y</i> ⁴ <i>xy</i> ⁵ <i>y</i> ⁶	

Appendix B: [16] alapján

1. Elmozdulásmezők

Vizsgáljunk egy R_0 sugarú hengerfelületre rátekert H menetemelkedésű csavar középvonalú testet lineáris rugalmasságtani keretek között.

A görbe test (rúd) középvonalának helyvektora a következőképpen írható le

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{\varphi}) = R_0 (\cos(\bar{\varphi}) \mathbf{i} + \sin(\bar{\varphi}) \mathbf{j}) + \frac{H}{2\pi} \bar{\varphi} \mathbf{k} \quad (\text{A1})$$

ahol a $\bar{\varphi}$ - a hengerkoordináta-rendszer szöge. Jelölje s a középvonalon mért ívkoordinátát. Az s ívkoordináta és a $\bar{\varphi}$ központi szög között a

$$ds = \bar{R} d\bar{\varphi} \quad (\text{A2})$$

összefüggés áll fenn, ahol $\bar{R} = \sqrt{\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 + R_0^2} = \frac{R_0}{\cos \alpha}$.

A Serret-Frenet-féle összefüggésekkel a spirálhuzal helyi koordinátarendszerének normális, binormális és érintő irányú \mathbf{n} , \mathbf{b} , \mathbf{t} egységvektorai, azaz a kísérő triéder egységvektorai könnyen előállíthatóak:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} = \frac{R_0}{R} (-\sin \bar{\varphi} \mathbf{i} + \cos \bar{\varphi} \mathbf{j}) + \frac{H}{2\pi R} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = -(\cos \bar{\varphi} \mathbf{i} + \sin \bar{\varphi} \mathbf{j}),$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{H}{2\pi R} (\sin \bar{\varphi} \mathbf{i} - \cos \bar{\varphi} \mathbf{j}) + \frac{R_0}{R} \mathbf{k} \quad (\text{A3})$$

Itt a normális irányú görbület azaz a fő görbületi sugár:

$$\kappa = \frac{\cos^2 \alpha}{R_0} = \frac{1}{R_1} \quad (\text{A4})$$

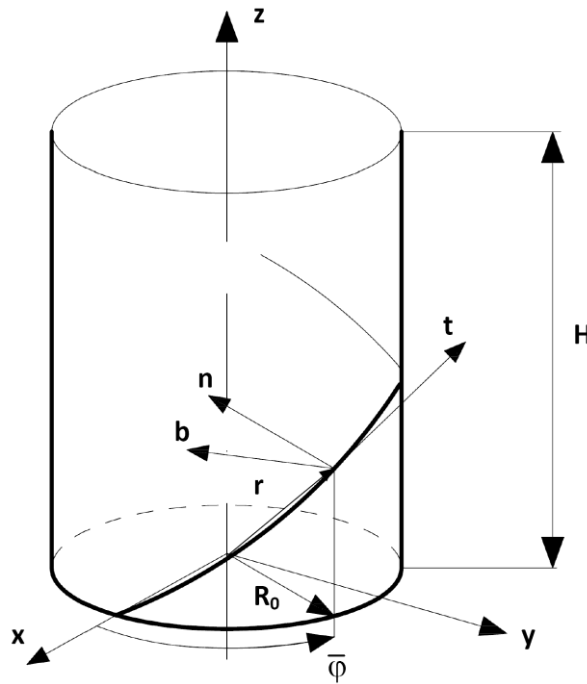
ill. az egységnyi hosszra eső elcsavarodás:

$$\tau = \frac{\sin 2\alpha}{2R_0}. \quad (\text{A5})$$

Fennállnak még az alábbiak is

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (\text{A6})$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (\text{A7})$$



B1. ábra. Spirális huzal a helyi koordináta-rendszer egységvektoraival.

A triéder csúcspontjának elmozdulását a helyi koordinátarendszerben $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ irányú független elmozdulás mezővel $u_{0i}, i = 1, 2, 3$, míg a szögelfordulását $\chi_i, i = 1, 2, 3$ -mal jellemezzük.

A mechanikai állapotot az (x, y, s) görbevonalú koordinátarendszerben írjuk le. Az x és y tengelyek a keresztmetszet fő tengelyeivel esnek egybe. Itt x és y az \mathbf{n} és \mathbf{b} irányú koordinátákat jelöli, míg s koordináta vonal \mathbf{t} irányában haladjon át a rúd súlypontján. A tengelyek irányát a felvett koordinátarendszerben $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ egységvektorok jelölik ki. Az ezek irányába eső tengelyirányú elmozdulásokat jelölje $u_i, i = 1, 2, 3$.

Tehát egy tetszőleges P pont elmozdulása

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b} + u_t \mathbf{t} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A8})$$

2. Elmozdulásmezők végelelemes közelítése h0 modellnél

A modell felépítésénél lényeges szerepet tölt be a helyi ($\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$) és a globális ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) koordinátarendszerek közötti transzformáció, azaz

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_0 \mathbf{c} \quad (\text{A9})$$

ahol $\bar{\mathbf{c}}$ a helyi koordináta-rendszerbeli, \mathbf{c} a globál koordináta-rendszerbeli vektor, \mathbf{T}_0 a transzformációs mátrix:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} -\cos \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} & 0 \\ \frac{H}{2\pi \bar{R}} \sin \bar{\varphi} & -\frac{H}{2\pi \bar{R}} \cos \bar{\varphi} & \frac{R_0}{\bar{R}} \\ -\frac{R_0}{\bar{R}} \sin \bar{\varphi} & \frac{R_0}{\bar{R}} \cos \bar{\varphi} & \frac{H}{2\pi \bar{R}} \end{bmatrix} \quad (\text{A10})$$

Megjegyzendő, ha $\alpha < 0$, $d\bar{\varphi} < 0$, akkor $\bar{R} = -R_0 / \cos \alpha < 0$.

A közelítést oly módon fogjuk felépíteni, hogy a merevtestszerű mozgásból, aminek most hat a szabadságfoka, ne keletkezzen alakváltozás. Ezt úgy tudjuk egyszerűen elérni, hogy a rúd kezdeti, továbbiakban I jelű keresztmetszetében lévő

$$\mathbf{q}_I^{G,T} = [u_{0x} \ u_{0y} \ u_{0z} \ \chi_x \ \chi_y \ \chi_z]_I \quad (\text{A11})$$

általánosított globális koordinátarendszerbeli elmozdulás vektorból származó merevtestszerű mozgáshoz hozzáadjuk az I -hez relatívan képzett rugalmas elmozdulásokat. Vezessük be a következő jelölést:

$$\varphi = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_I}{\bar{\varphi}_J - \bar{\varphi}_I} \quad (\text{A12})$$

Lokális rendszerben egy tetszőleges φ -vel jellemzett helyen

$$\mathbf{u}_0^{L,T} = [u_{01} \ u_{02} \ u_{03}] \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\chi}^{L,T} = [\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3] \quad (\text{A13})$$

az elmozdulás és a szögelfordulás vektora. Az elem középvonalának egy tetszőleges $\mathbf{r} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k}$ koordinátájú helyén az $\mathbf{r}_I = X_I \mathbf{i} + Y_I \mathbf{j} + Z_I \mathbf{k}$ által kijelölt I - keresztmetszet mozgásából (eltolódásból és elfordulásból)

$$\mathbf{u}_{0R}^G = \mathbf{u}_{0I}^G - \boldsymbol{\Omega}^{\text{Ar}} \boldsymbol{\chi}_I^G \quad (\text{A14})$$

merevtestszerű elmozdulás keletkezik a globális koordinátarendszerben, ahol

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{Ar}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z & \Delta Y \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X \\ -\Delta Y & \Delta X & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Delta X &= X - X_I, \\ \Delta Y &= Y - Y_I, \\ \Delta Z &= Z - Z_I \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

A fentieket és az (A9)-et figyelembevéve, a helyi koordinátarendszerben a kérdéses $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$ pontban a középvonal elmozdulása \mathbf{u}_0^L és keresztmetszetének elfordulása $\boldsymbol{\chi}^L$ a következő kifejezéssel írható le:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}^L = \mathbf{V}^{LG}(\varphi) \mathbf{q}_I^G + \boldsymbol{\Phi}(\varphi) \mathbf{a} + \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\varphi) \hat{\mathbf{a}}, \quad \boldsymbol{\Phi}(0) = \mathbf{0}, \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}}(0) = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(1) = \mathbf{0} \quad (\text{A16})$$

ahol az első tag az I -keresztmetszet mozgásának hatását, míg a második és harmadik tag az I -hez képesti alakváltozásból származó elmozdulást és szögelfordulását hordozza. Itt

$$\mathbf{V}^{LG} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & -\mathbf{T}_0 \boldsymbol{\Omega}^{\Delta r} \\ 0 & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A17})$$

transzformációs mátrix, $\boldsymbol{\Phi}(\varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\varphi)$ approximációs mátrixok, \mathbf{a} az elmozdulási paraméterek vektora, $\hat{\mathbf{a}}$ a pótlólagos állandók vektora. A $\boldsymbol{\Phi}(\varphi) \mathbf{a}$ és a $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\varphi) \hat{\mathbf{a}}$ tagok az I -dik csomópont-hoz viszonyítva a rugalmas deformációból származó elmozdulást írják le.

A $\boldsymbol{\Phi}(\varphi)$ approximációs mátrix tekintettel a $\boldsymbol{\Phi}(0) = \mathbf{0}$ feltételre az alábbi diagonal mátrixos alakot ölti

$$\boldsymbol{\Phi}(\varphi) = \varphi \mathbf{E}_{(6,6)}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad (\text{A18})$$

ahol $\mathbf{E}_{(6,6)} = \text{diag}[111111]$. Célunk az \mathbf{a} paraméter vektor eliminálása a \mathbf{q}_J^G vektor behozása révén. Felírva a J -keresztmetszetbeli csomóponti elmozdulásvektort

$$\mathbf{q}_J^G = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}_J^G = \mathbf{T}^T(\varphi_J) \mathbf{V}^{LG}(\varphi_J) \mathbf{q}_I^G + \mathbf{T}^T(\varphi_J) \boldsymbol{\Phi}(\varphi_J) \mathbf{a} \quad (\text{A19})$$

ahol $\mathbf{T}(\varphi_J)$ a transzformációs mátrix a globális és a lokális koordináta-rendszer között a J -dik csomópontban, a transzponáltja

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0^T \end{bmatrix} \quad (\text{A20})$$

és bevezetve a $\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_I^G \mathbf{q}_J^G]^T$ rúdelem csomóponti elmozdulás vektora jelölést, formálisan írható, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad (\text{A21})$$

ahol

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}_J \begin{bmatrix} -\mathbf{V}_J^G & \mathbf{E}_{(6,6)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_J = \{\mathbf{T}^T(\varphi_J) \boldsymbol{\Phi}(\varphi_J)\}^{-1}, \quad \mathbf{V}_J^G = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(3,3)} & -\boldsymbol{\Omega}^{\Delta r}(\varphi_J) \\ 0 & \mathbf{E}_{(3,3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{(3,3)} = \text{diag}[111]-$$

diagonális egység mátrix. Az \mathbf{a} paraméter vektorra kapott kifejezés felhasználásával annak (A19)-be történő behelyettesítésével

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}^L = \mathbf{G}(\varphi) \mathbf{q} + \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\varphi) \hat{\mathbf{a}} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}^L = \mathbf{G}(\varphi) \mathbf{q} + \hat{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A22})$$

közelítéshez jutunk. Itt

$$\mathbf{G}(\varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{LG}(\varphi) - \boldsymbol{\Phi}(\varphi) \mathbf{R}_J \mathbf{V}_J^G & \boldsymbol{\Phi}(\varphi) \mathbf{R}_J \end{bmatrix} \quad (\text{A23})$$

A következőkben az egyszerűbb írásmód miatt az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}^L, \quad \hat{\mathbf{\Phi}}(\varphi) \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{\Phi}} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{\Phi}_p \mathbf{a}^p \quad (\text{A24})$$

jelöléseket fogjuk használni. Mivel az I kezdőponttal rendelkező elemen az ívhossz $s = \bar{R}(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_I)$,

az elem középvonalának hossza $L = \bar{R}(\bar{\varphi}_J - \bar{\varphi}_I)$, akkor $\bar{s} = \frac{s}{L} = \frac{\bar{R}(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_I)}{\bar{R}(\bar{\varphi}_J - \bar{\varphi}_I)} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_I}{\bar{\varphi}_J - \bar{\varphi}_I} = \varphi$, $0 \leq \bar{s} \leq 1$.

Tehát az elem középvonalához kötődő elmozdulást és szögelfordulást

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{a}^p \quad (\text{A25})$$

alakban közelítjük, ahol bevezetve $\bar{s} = s/L$ dimenziótlan mennyiséget és az elem középvonalának L hosszát, I és J -vel jelölve a rúd csomópontjait

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uI} & \mathbf{G}_{uJ} \\ \mathbf{G}_{\chi I} & \mathbf{G}_{\chi J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_\chi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_I^T \ \mathbf{q}_J^T] \quad (\text{A26})$$

$$\mathbf{q}_I^T = \left[[u_{10} \ u_{20} \ u_{30}]_I \ [\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3]_I \right], \quad \mathbf{q}_J^T = \left[[u_{10} \ u_{20} \ u_{30}]_J \ [\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3]_J \right] \quad (\text{A27})$$

míg a magasabb fokú közelítést tartalmazó tagokhoz tartozó

$$\mathbf{\Phi}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{0p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{0p} \end{bmatrix}, \quad (\text{A28})$$

$$\mathbf{\Phi}_{0p} = \begin{bmatrix} \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}^2 - \bar{s} & \bar{s}^3 - \bar{s} & \dots & \bar{s}^p - \bar{s} \end{bmatrix} \quad (\text{A29})$$

illetve

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{p,T} &= [\mathbf{a}_u^{p,T} \ \mathbf{a}_\chi^{p,T}], \\ \mathbf{a}_u^{p,T} &= [a_{u1}^{p=2} \ a_{u1}^{p=3}, \dots, a_{u1}^p \ a_{u2}^{p=2} \ a_{u2}^{p=3}, \dots, a_{u2}^p \ a_{u3}^{p=2} \ a_{u3}^{p=3}, \dots, a_{u3}^p], \\ \mathbf{a}_\chi^{p,T} &= [a_{\chi1}^{p=2} \ a_{\chi1}^{p=3}, \dots, a_{\chi1}^p \ a_{\chi2}^{p=2} \ a_{\chi2}^{p=3}, \dots, a_{\chi2}^p \ a_{\chi3}^{p=2} \ a_{\chi3}^{p=3}, \dots, a_{\chi3}^p]. \end{aligned} \quad (\text{A30})$$

Az elmozdulás és a szögelfordulás külön is felírható

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{G}_u \mathbf{q} + \mathbf{\Phi}_{up} \mathbf{a}^p, \quad \boldsymbol{\chi} = \mathbf{G}_\chi \mathbf{q} + \mathbf{\Phi}_{\chi p} \mathbf{a}^p \quad (\text{A31})$$

Az s szerinti deriváltakra is szükség van. Ezek rendre

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} = \mathbf{G}' \mathbf{q} + \mathbf{\Phi}'_p \mathbf{a}^p \quad (\text{A32})$$

ahol

$$\mathbf{G}'(\varphi) = [\mathbf{V}^{LG}(\varphi) - \mathbf{\Phi}'(\varphi) \mathbf{R}_J \mathbf{V}_J^G \quad \mathbf{\Phi}'(\varphi) \mathbf{R}_J], \quad (\text{A33})$$

$$\mathbf{V}'^{LG} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_0 & -\mathbf{T}'_0 \boldsymbol{\Omega}^{\Delta r} - \mathbf{T}_0 (\boldsymbol{\Omega}^{\Delta r})' \\ 0 & \mathbf{T}'_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A34})$$

$$\mathbf{T}'_0 = \frac{d\mathbf{T}_0}{ds} = \frac{d\mathbf{T}_0(\bar{\varphi})}{R d\bar{\varphi}} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \sin \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} & 0 \\ \frac{H}{2\pi R} \cos \bar{\varphi} & \frac{H}{2\pi R} \sin \bar{\varphi} & 0 \\ -\frac{R_0}{R} \cos \bar{\varphi} & -\frac{R_0}{R} \sin \bar{\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\Omega}^{\Delta r})' = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{H}{2\pi} & R_0 \cos \bar{\varphi} \\ \frac{H}{2\pi} & 0 & R_0 \sin \bar{\varphi} \\ -R_0 \cos \bar{\varphi} & -R_0 \sin \bar{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A35})$$

$$\boldsymbol{\Phi}' = \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\varphi)}{R d\bar{\varphi}} = \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\varphi)}{R d\bar{\varphi}} \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\varphi)}{d\varphi} \frac{1}{R(\varphi_j - \varphi_i)} = \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\varphi)}{d\varphi} \frac{1}{L} = \frac{1}{L} \mathbf{E}_{(6,6)} \quad (\text{A36})$$

Appendix C: Alakváltozások a *h6* modellnél

Fajlagos nyúlások a (3), (4), (13) alatti összefüggések és az alábbi közelítő függvények miatt

$$\mathbf{h}^{(4)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} (u_{1x^4} x^4 + u_{1x^3y} x^3 y + u_{1x^2y^2} x^2 y^2 + u_{1xy^3} xy^3 + u_{1y^4} y^4) \\ (u_{2x^4} x^4 + u_{2x^3y} x^3 y + u_{2x^2y^2} x^2 y^2 + u_{2xy^3} xy^3 + u_{2y^4} y^4) \\ (u_{3x^4} x^4 + u_{3x^3y} x^3 y + u_{3x^2y^2} x^2 y^2 + u_{3xy^3} xy^3 + u_{3y^4} y^4) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}^{(5)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} (u_{1x^5} x^5 + u_{1x^4y} x^4 y + u_{1x^3y^2} x^3 y^2 + u_{1x^2y^3} x^2 y^3 + u_{1xy^4} xy^4 + u_{1y^5} y^5) \\ (u_{2x^5} x^5 + u_{2x^4y} x^4 y + u_{2x^3y^2} x^3 y^2 + u_{2x^2y^3} x^2 y^3 + u_{2xy^4} xy^4 + u_{2y^5} y^5) \\ (u_{3x^5} x^5 + u_{3x^4y} x^4 y + u_{3x^3y^2} x^3 y^2 + u_{3x^2y^3} x^2 y^3 + u_{3xy^4} xy^4 + u_{3y^5} y^5) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}^{(6)}(x, y, s) = \begin{bmatrix} (u_{1x^6} x^6 + u_{1x^5y} x^5 y + u_{1x^4y^2} x^4 y^2 + u_{1x^3y^3} x^3 y^3 + u_{1x^2y^4} x^2 y^4 + u_{1xy^5} xy^5 + u_{1y^6} y^6) \\ (u_{2x^6} x^6 + u_{2x^5y} x^5 y + u_{2x^4y^2} x^4 y^2 + u_{2x^3y^3} x^3 y^3 + u_{2x^2y^4} x^2 y^4 + u_{2xy^5} xy^5 + u_{2y^6} y^6) \\ (u_{3x^6} x^6 + u_{3x^5y} x^5 y + u_{3x^4y^2} x^4 y^2 + u_{3x^3y^3} x^3 y^3 + u_{3x^2y^4} x^2 y^4 + u_{3xy^5} xy^5 + u_{3y^6} y^6) \end{bmatrix}$$

a következők szerint számolhatók

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_{1x} + 2x u_{1x^2} + y u_{1xy} + 3x^2 u_{1x^3} + 2x y u_{1x^2y} + y^2 u_{1xy^2} + 4x^3 u_{1x^4} + 3x^2 y u_{1x^3y} + 2xy^2 u_{1x^2y^2} + y^3 u_{1xy^3} \\ &+ 5x^4 u_{1x^5} + 4x^3 y u_{1x^4y} + 3x^2 y^2 u_{1x^3y^2} + 2xy^3 u_{1x^2y^3} + y^4 u_{1xy^4} \\ &+ 6x^5 u_{1x^6} + 5x^4 y u_{1x^5y} + 4x^3 y^2 u_{1x^4y^2} + 3x^2 y^3 u_{1x^3y^3} + 2xy^4 u_{1x^2y^4} + y^5 u_{1xy^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} = & u_{2y} + x u_{2xy} + 2y u_{2y^2} + x^2 u_{2x^2y} + 2xy u_{2xy^2} + 3y^2 u_{2y^3} + x^3 u_{2x^3y} + 2x^2y u_{2x^2y^2} + 3xy^2 u_{2xy^3} + 4y^3 u_{2y^4} \\ & + x^4 u_{2x^4y} + 2x^3y u_{2x^3y^2} + 3x^2y^2 u_{2x^2y^3} + 4xy^3 u_{2xy^4} + 5y^4 u_{2y^5} \\ & + x^5 u_{2x^5y} + 2x^4y u_{2x^4y^2} + 3x^3y^2 u_{2x^3y^3} + 4x^2y^3 u_{2x^2y^4} + 5xy^4 u_{2xy^5} + 6y^5 u_{2y^6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 = \frac{R_1}{R_1 - x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} - \frac{u_1}{R_1} \right) = \frac{R_1}{R_1 - x} \{ & (u'_{03} + \chi_1 y - \chi_2 x + x^2 u'_{3x^2} + xy u'_{3xy} + y^2 u'_{3y^2} \\ & + x^3 u'_{3x^3} + x^2 y u'_{3x^2y} + xy^2 u'_{3xy^2} + y^3 u'_{3y^3} + x^4 u'_{3x^4} + x^3 y u'_{3x^3y} + x^2 y^2 u'_{3x^2y^2} + xy^3 u'_{3xy^3} + y^4 u'_{3y^4} \\ & + x^5 u'_{3x^5} + x^4 y u'_{3x^4y} + x^3 y^2 u'_{3x^3y^2} + x^2 y^3 u'_{3x^2y^3} + xy^4 u'_{3xy^4} + y^5 u'_{3y^5} \\ & + x^6 u'_{3x^6} + x^5 y u'_{3x^5y} + x^4 y^2 u'_{3x^4y^2} + x^3 y^3 u'_{3x^3y^3} + x^2 y^4 u'_{3x^2y^4} + xy^5 u'_{3xy^5} + y^6 u'_{3y^6}) \\ & - \frac{1}{R_1} (u_{01} - \chi_3 y + u_{1x} x + x^2 u_{1x^2} + xy u_{1xy} + y^2 u_{1y^2} \\ & + x^3 u_{1x^3} + x^2 y u_{1x^2y} + xy^2 u_{1xy^2} + y^3 u_{1y^3} + x^4 u_{1x^4} + x^3 y u_{1x^3y} + x^2 y^2 u_{1x^2y^2} + xy^3 u_{1xy^3} + y^4 u_{1y^4} \\ & + x^5 u_{1x^5} + x^4 y u_{1x^4y} + x^3 y^2 u_{1x^3y^2} + x^2 y^3 u_{1x^2y^3} + xy^4 u_{1xy^4} + y^5 u_{1y^5} \\ & + x^6 u_{1x^6} + x^5 y u_{1x^5y} + x^4 y^2 u_{1x^4y^2} + x^3 y^3 u_{1x^3y^3} + x^2 y^4 u_{1x^2y^4} + xy^5 u_{1xy^5} + y^6 u_{1y^6}) \} \end{aligned}$$

(C1)

míg a fajlagos szögtorzulások

$$\begin{aligned}\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = & -\chi_3 + x u_{1xy} + 2y u_{1y^2} + \chi_3 + 2x u_{2x^2} + y u_{2xy} \\ & + x^2 u_{1x^2y} + 2xy u_{1xy^2} + 3y^2 u_{1y^3} + 3x^2 u_{2x^3} + 2xy u_{1x^2y} + y^2 u_{1xy^2} \\ & + x^3 u_{1x^3y} + 2x^2 y u_{1x^2y^2} + 3xy^2 u_{1xy^3} + 4y^3 u_{1y^4} + 4x^3 u_{2x^4} + 3x^2 y u_{2x^3y} + 2xy^2 u_{2x^2y^2} + y^3 u_{2xy^3} \\ & + x^4 u_{1x^4y} + 2x^3 y u_{1x^3y^2} + 3x^2 y^2 u_{1x^2y^3} + 4xy^3 u_{1xy^4} + 5y^4 u_{1y^5} \\ & + 5x^4 u_{2x^5} + 4x^3 y u_{2x^4y} + 3x^2 y^2 u_{2x^3y^2} + 2xy^3 u_{2x^2y^3} + y^4 u_{2xy^4} \\ & + x^5 u_{1x^5y} + 2x^4 y u_{1x^4y^2} + 3x^3 y^2 u_{1x^3y^3} + 4x^2 y^3 u_{1x^2y^4} + 5xy^4 u_{1xy^5} + 6y^5 u_{1y^6} \\ & + 6x^5 u_{2x^6} + 5x^4 y u_{2x^5y} + 4x^3 y^2 u_{2x^4y^2} + 3x^2 y^3 u_{2x^3y^3} + 2xy^4 u_{2x^2y^4} + y^5 u_{2xy^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{13} = & \frac{R_1}{R_1 - x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \tau u_2 + \frac{u_3}{R_1} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x} = -\chi_2 + 2xu_{3x^2} + yu_{3xy} + 3x^2u_{3x^3} + 2xyu_{3x^2y} + y^2u_{3xy^2} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} (u'_{01} - \chi_3 y + u'_{1x}x + x^2u'_{1x^2} + xyu'_{1xy} + y^2u'_{1y^2} + x^3u'_{1x^3} + x^2yu'_{1x^2y} + xy^2u'_{1xy^2} + y^3u'_{1y^3}) \\
& - \frac{R_1}{R_1 - x} \tau (u_{02} + \chi_3 x + u_{2y}y + x^2u_{2x^2} + xyu_{2xy} + y^2u_{2y^2} + x^3u_{2x^3} + x^2yu_{2x^2y} + xy^2u_{2xy^2} + y^3u_{2y^3}) \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{1}{R_1} (u_{03} + \chi_1 y - \chi_2 x + x^2u_{3x^2} + xyu_{3xy} + y^2u_{3y^2} + x^3u_{3x^3} + x^2yu_{3x^2y} + xy^2u_{3xy^2} + y^3u_{3y^3}) \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{1}{R_1} (x^4u_{3x^4} + x^3yu_{3x^3y} + x^2y^2u_{3x^2y^2} + xy^3u_{3xy^3} + y^4u_{3y^4}) \\
& + 4x^3u_{3x^4} + 3x^2yu_{3x^3y} + 2xy^2u_{3x^2y^2} + y^3u_{3xy^3} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} (x^4u'_{1x^4} + x^3yu'_{1x^3y} + x^2y^2u'_{1x^2y^2} + xy^3u'_{1xy^3} + y^4u'_{1y^4}) \\
& - \frac{R_1}{R_1 - x} \tau (x^4u_{2x^4} + x^3yu_{2x^3y} + x^2y^2u_{2x^2y^2} + xy^3u_{2xy^3} + y^4u_{2y^4}) \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{1}{R_1} (x^5u_{3x^5} + x^4yu_{3x^4y} + x^3y^2u_{3x^3y^2} + x^2y^3u_{3x^2y^3} + xy^4u_{3xy^4} + y^5u_{3y^5}) \\
& + 5x^4u_{3x^5} + 4x^3yu_{3x^4y} + 3x^2y^2u_{3x^3y^2} + 2xy^3u_{3x^2y^3} + y^4u_{3xy^4} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} (x^5u'_{1x^5} + x^4yu'_{1x^4y} + x^3y^2u'_{1x^3y^2} + x^2y^3u'_{1x^2y^3} + xy^4u'_{1xy^4} + y^5u'_{1y^5}) \\
& - \frac{R_1}{R_1 - x} \tau (x^5u_{2x^5} + x^4yu_{2x^4y} + x^3y^2u_{2x^3y^2} + x^2y^3u_{2x^2y^3} + xy^4u_{2xy^4} + y^5u_{2y^5}) \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \frac{1}{R_1} (x^6u_{3x^6} + x^5yu_{3x^5y} + x^4y^2u_{3x^4y^2} + x^3y^3u_{3x^3y^3} + x^2y^4u_{3x^2y^4} + xy^5u_{3xy^5} + y^6u_{3y^6}) \\
& + 6x^5u_{3x^6} + 5x^4yu_{3x^5y} + 4x^3y^2u_{3x^4y^2} + 3x^2y^3u_{3x^3y^3} + 2xy^4u_{3x^2y^4} + y^5u_{3xy^5} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} (x^6u'_{1x^6} + x^5yu'_{1x^5y} + x^4y^2u'_{1x^4y^2} + x^3y^3u'_{1x^3y^3} + x^2y^4u'_{1x^2y^4} + xy^5u'_{1xy^5} + y^6u'_{1y^6}) \\
& - \frac{R_1}{R_1 - x} \tau (x^6u_{2x^6} + x^5yu_{2x^5y} + x^4y^2u_{2x^4y^2} + x^3y^3u_{2x^3y^3} + x^2y^4u_{2x^2y^4} + xy^5u_{2xy^5} + y^6u_{2y^6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{23} = & \frac{R_1}{R_1 - x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} + \tau u_1 \right) + \frac{\partial u_3}{\partial y} = \chi_1 + x u_{3,xy} + 2y u_{3,y^2} + x^2 u_{3,x^2y} + 2yx u_{3,xy^2} + 3y^2 u_{3,y^3} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \left\{ (u'_{02} + \chi'_3 x + u'_{2,y} y + x^2 u'_{2,x^2} + xy u'_{2,xy} + y^2 u'_{2,y^2} + x^3 u'_{2,x^3} + x^2 y u'_{2,x^2y} + xy^2 u'_{2,xy^2} + y^3 u'_{2,y^3}) \right. \\
& + \tau [u_{01} - \chi_3 y + u_{1,x} x + (u_{1,x^2} x^2 + u_{1,xy} xy + u_{1,y^2} y^2) \\
& + (u_{1,x^3} x^3 + u_{1,x^2y} x^2 y + u_{1,xy^2} xy^2 + u_{1,y^3} y^3)] \left. \right\} \\
& + x^3 u_{3,x^3y} + 2yx^2 u_{3,x^2y^2} + 3y^2 x u_{3,xy^3} + 4y^3 u_{3,y^4} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \left\{ x^4 u'_{2,x^4} + x^3 y u'_{2,x^3y} + x^2 y^2 u'_{2,x^2y^2} + xy^3 u'_{2,xy^3} + y^4 u'_{2,y^4} \right. \\
& + \tau [(u_{1,x^4} x^4 + u_{1,x^3y} x^3 y + u_{1,x^2y^2} x^2 y^2 + u_{1,xy^3} xy^3 + u_{1,y^4} y^4)] \left. \right\} \\
& x^4 u_{3,x^4y} + 2yx^3 u_{3,x^3y^2} + 3y^2 x^2 u_{3,x^2y^3} + 4xy^3 u_{3,xy^4} + 5y^4 u_{3,y^5} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \left\{ x^5 u'_{2,x^5} + x^4 y u'_{2,x^4y} + x^3 y^2 u'_{2,x^3y^2} + x^2 y^3 u'_{2,x^2y^3} + xy^4 u'_{2,xy^4} + y^5 u'_{2,y^5} \right. \\
& + \tau [(u_{1,x^5} x^5 + u_{1,x^4y} x^4 y + u_{1,x^3y^2} x^3 y^2 + u_{1,x^2y^3} x^2 y^3 + u_{1,xy^4} xy^4 + u_{1,y^5} y^5)] \left. \right\} \\
& + x^5 u_{3,x^5y} + 2yx^4 u_{3,x^4y^2} + 3y^2 x^3 u_{3,x^3y^3} + 4x^2 y^3 u_{3,x^2y^4} + 5xy^4 u_{3,xy^5} + 6y^5 u_{3,y^6} \\
& + \frac{R_1}{R_1 - x} \left\{ x^6 u'_{2,x^6} + x^5 y u'_{2,x^5y} + x^4 y^2 u'_{2,x^4y^2} + x^3 y^3 u'_{2,x^3y^3} + x^2 y^4 u'_{2,x^2y^4} + xy^5 u'_{2,xy^5} + y^6 u'_{2,y^6} \right. \\
& + \tau [(u_{1,x^6} x^6 + u_{1,x^5y} x^5 y + u_{1,x^4y^2} x^4 y^2 + u_{1,x^3y^3} x^3 y^3 + u_{1,x^2y^4} x^2 y^4 + u_{1,xy^5} xy^5 + u_{1,y^6} y^6)] \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{C2}$$

Appendix D: A Gamma mátrix elemei

Az elemeket a FORTRAN program egy részletével mutatjuk be.

A keresztmetszet koordinátái x és y , a belőlük számított $rh=R1/(R1-x)$, $rhpr1=rh/r1$.

Prizmatikus tartónál $r1=1.d+15$, $tau=0.d0$, $r0=0.d0$, $rh=1$, $rhpr1=0$

A mátrixok méretei:

b(6,16), gh21(6,9), gh22(6,9), gh31(6,12), gh32(6,12),

gh41(6,10), gh42(6,5), gh43(6,10), gh44(6,5), gh51(6,10), gh52(6,8), gh53(6,10), gh54(6,8),

gh61(6,10), gh62(6,11), gh63(6,10), gh64(6,11)

c G1 matrix

b(3,1)=-rh/r1

b(3,6)=rh

b(3,9)=y*rh/r1

b(3,10)=y*rh

b(3,11)=-x*rh

b(5,2)=-rh*tau

b(5,3)=rh/r1

b(5,4)=rh

b(5,7)=b(3,9)

b(5,8)=-(1.d0+rh*x/r1)

b(5,9)=-rh*tau*x

b(5,12)=-rh*y

b(6,1)=rh*tau

b(6,5)=rh

b(6,7)=1.d0

b(6,9)=-rh*tau*y

b(6,12)=rh*x

b(1,13)=1.

b(2,14)=1.

$b(3,13)=-x*rh/r1$
 $b(5,14)=-rh*tau*y$
 $b(5,15)=rh*x$
 $b(6,13)=rh*tau*x$
 $b(6,16)=rh*y$

c A h2 modellhez szükséges Gh21 matrix

$gh21(1,1)=2.d0*x$
 $gh21(1,2)=y$
 $gh21(2,5)=x$
 $gh21(2,6)=2.d0*y$
 $gh21(3,1)=-rhpr1*x**2$
 $gh21(3,2)=-rhpr1*x*y$
 $gh21(3,3)=-rhpr1*y**2$
 $gh21(4,2)=x$
 $gh21(4,3)=2.d0*y$
 $gh21(4,4)=2.d0*x$
 $gh21(4,5)=y$
 $gh21(5,4)=-rh*tau*x**2$
 $gh21(5,5)=-rh*tau*x*y$
 $gh21(5,6)=-rh*tau*y**2$
 $gh21(5,7)=rhpr1*x**2+2.d0*x$
 $gh21(5,8)=rhpr1*x*y+y$
 $gh21(5,9)=rhpr1*y**2$
 $gh21(6,1)=rh*tau*x**2$
 $gh21(6,2)=rh*tau*x*y$
 $gh21(6,3)=rh*tau*y**2$
 $gh21(6,8)=x$
 $gh21(6,9)=2.d0*y$

c Gh22 matrix

$gh22(3,7)=rh*x**2$
 $gh22(3,8)=rh*x*y$
 $gh22(3,9)=rh*y**2$
 $gh22(5,1)=rh*x**2$
 $gh22(5,2)=rh*x*y$
 $gh22(5,3)=rh*y**2$
 $gh22(6,4)=rh*x**2$
 $gh22(6,5)=rh*x*y$
 $gh22(6,6)=rh*y**2$

c A h3 modellhez is szükséges Gh31 matrix

$gh31(1,1)=3.d0*(x**2)$
 $gh31(1,2)=2.d0*x*y$
 $gh31(1,3)=y**2$
 $gh31(2,6)=x**2$
 $gh31(2,7)=2.d0*x*y$
 $gh31(2,8)=3.d0*(y**2)$
 $gh31(3,1)=-rhpr1*(x**3)$
 $gh31(3,2)=-rhpr1*(x**2)*y$
 $gh31(3,3)=-rhpr1*(y**2)*x$
 $gh31(3,4)=-rhpr1*(y**3)$
 $gh31(4,2)=x**2$
 $gh31(4,3)=2.d0*x*y$
 $gh31(4,4)=3.d0*(y**2)$
 $gh31(4,5)=3.d0*(x**2)$
 $gh31(4,6)=2.d0*x*y$
 $gh31(4,7)=y**2$
 $gh31(5,5)=-rh*tau*(x**3)$
 $gh31(5,6)=-rh*tau*(x**2)*y$

$gh31(5,7)=-rh*\tau*x*(y**2)$
 $gh31(5,8)=-rh*\tau*(y**3)$
 $gh31(5,9)=rhpr1*(x**3)+3.d0*(x**2)$
 $gh31(5,10)=rhpr1*(x**2)*y+2.d0*x*y$
 $gh31(5,11)=rhpr1*(y**2)*x+(y**2)$
 $gh31(5,12)=rhpr1*(y**3)$
 $gh31(6,1)=rh*\tau*(x**3)$
 $gh31(6,2)=rh*\tau*(x**2)*y$
 $gh31(6,3)=rh*\tau*x*(y**2)$
 $gh31(6,4)=rh*\tau*(y**3)$
 $gh31(6,10)=(x**2)$
 $gh31(6,11)=2.d0*x*y$
 $gh31(6,12)=3.d0*(y**2)$

c Gh32 matrix

$gh32(3,9)=rh*(x**3)$
 $gh32(3,10)=rh*(x**2)*y$
 $gh32(3,11)=rh*x*(y**2)$
 $gh32(3,12)=rh*(y**3)$
 $gh32(5,1)=rh*(x**3)$
 $gh32(5,2)=rh*(x**2)*y$
 $gh32(5,3)=rh*x*(y**2)$
 $gh32(5,4)=rh*(y**3)$
 $gh32(6,5)=rh*(x**3)$
 $gh32(6,6)=rh*(x**2)*y$
 $gh32(6,7)=rh*x*(y**2)$
 $gh32(6,8)=rh*(y**3)$

c A h4 modellhez is szükséges Gh41 matrix

$gh41(1,1)=4.d0*(x**3)$
 $gh41(1,2)=3.d0*(x**2)*y$
 $gh41(1,3)=2.d0*x*(y**2)$
 $gh41(1,4)=y**3$
 $gh41(2,7)=x**3$
 $gh41(2,8)=2.d0*(x**2)*y$
 $gh41(2,9)=3.d0*x*(y**2)$
 $gh41(2,10)=4.d0*(y**3)$
 $gh41(3,1)=-rhpr1*(x**4)$
 $gh41(3,2)=-rhpr1*(x**3)*y$
 $gh41(3,3)=-rhpr1*(y**2)*(x**2)$
 $gh41(3,4)=-rhpr1*x*(y**3)$
 $gh41(3,5)=-rhpr1*(y**4)$
 $gh41(4,2)=x**3$
 $gh41(4,3)=2.d0*(x**2)*y$
 $gh41(4,4)=3.d0*x*(y**2)$
 $gh41(4,5)=4.d0*(y**3)$
 $gh41(4,6)=4.d0*(x**3)$
 $gh41(4,7)=3.d0*(x**2)*y$
 $gh41(4,8)=2.d0*(y**2)*x$
 $gh41(4,9)=y**3$
 $gh41(5,6)=-rh*\tau*(x**4)$
 $gh41(5,7)=-rh*\tau*(x**3)*y$
 $gh41(5,8)=-rh*\tau*(x**2)*(y**2)$
 $gh41(5,9)=-rh*\tau*x*(y**3)$
 $gh41(5,10)=-rh*\tau*(y**4)$
 $gh41(6,1)=rh*\tau*(x**4)$
 $gh41(6,2)=rh*\tau*(x**3)*y$
 $gh41(6,3)=rh*\tau*(x**2)*(y**2)$
 $gh41(6,4)=rh*\tau*x*(y**3)$
 $gh41(6,5)=rh*\tau*(y**4)$

c Gh42 matrix

gh42(5,1)=rhpr1*(x**4)+4.d0*(x**3)
gh42(5,2)=rhpr1*(x**3)*y+3.d0*(x**2)*y
gh42(5,3)=rhpr1*(x**2)*(y**2)+2.d0*x*(y**2)
gh42(5,4)=rhpr1*x*(y**3)+(y**3)
gh42(5,5)=rhpr1*(y**4)
gh42(6,2)=x**3
gh42(6,3)=2.d0*(x**2)*y
gh42(6,4)=3.d0*x*(y**2)
gh42(6,5)=4.d0*(y**3)

c Gh43 matrix

gh43(5,1)=rh*(x**4)
gh43(5,2)=rh*(x**3)*y
gh43(5,3)=rh*(x**2)*(y**2)
gh43(5,4)=rh*x*(y**3)
gh43(5,5)=rh*(y**4)
gh43(6,6)=rh*(x**4)
gh43(6,7)=rh*(x**3)*y
gh43(6,8)=rh*(x**2)*(y**2)
gh43(6,9)=rh*x*(y**3)
gh43(6,10)=rh*(y**4)

c Gh44 matrix

gh44(3,1)=rh*(x**4)
gh44(3,2)=rh*(x**3)*y
gh44(3,3)=rh*(x**2)*(y**2)
gh44(3,4)=rh*x*(y**3)
gh44(3,5)=rh*(y**4)

c A h5 modellhez is szükséges Gh51 matrix

gh51(1,1)=5.d0*(x**4)
gh51(1,2)=4.d0*(x**3)*y
gh51(1,3)=3.d0*(x**2)*(y**2)
gh51(1,4)=2.d0*x*(y**3)
gh51(1,5)=(y**4)
gh51(2,8)=x**4
gh51(2,9)=2.d0*(x**3)*y
gh51(2,10)=3.d0*(x**2)*(y**2)
gh51(3,1)=-rhpr1*(x**5)
gh51(3,2)=-rhpr1*(x**4)*y
gh51(3,3)=-rhpr1*(y**2)*(x**3)
gh51(3,4)=-rhpr1*(x**2)*(y**3)
gh51(3,5)=-rhpr1*x*(y**4)
gh51(3,6)=-rhpr1*(y**5)
gh51(4,2)=x**4
gh51(4,3)=2.d0*(x**3)*y
gh51(4,4)=3.d0*(x**2)*(y**2)
gh51(4,5)=4.d0*x*(y**3)
gh51(4,6)=5.d0*(y**4)
gh51(4,7)=5.d0*(x**4)
gh51(4,8)=4.d0*(x**3)*y
gh51(4,9)=3.d0*(y**2)*(x**2)
gh51(4,10)=2.d0*x*(y**3)
gh51(5,7)=-rh*tau*(x**5)
gh51(5,8)=-rh*tau*(x**4)*y
gh51(5,9)=-rh*tau*(x**3)*(y**2)
gh51(5,10)=-rh*tau*(x**2)*(y**3)
gh51(6,1)=rh*tau*(x**5)
gh51(6,2)=rh*tau*(x**4)*y

$gh51(6,3)=rh*\tau*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh51(6,4)=rh*\tau*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh51(6,5)=rh*\tau*x*(y^{**4})$
 $gh51(6,6)=rh*\tau*(y^{**5})$

c Gh52 matrix

$gh52(2,1)=4.d0*x*(y^{**3})$
 $gh52(2,2)=5.d0*(y^{**4})$
 $gh52(4,1)=(y^{**4})$
 $gh52(5,1)=-rh*\tau*x*(y^{**4})$
 $gh52(5,2)=-rh*\tau*(y^{**5})$
 $gh52(5,3)=rhpr1*(x^{**5})+5.d0*(x^{**4})$
 $gh52(5,4)=rhpr1*(x^{**4})*y+4.d0*(x^{**3})*y$
 $gh52(5,5)=rhpr1*(x^{**3})*(y^{**2})+3.d0*(x^{**2})*(y^{**2})$
 $gh52(5,6)=rhpr1*(x^{**2})*(y^{**3})+2.d0*x*(y^{**3})$
 $gh52(5,7)=rhpr1*x*(y^{**4})+(y^{**4})$
 $gh52(5,8)=rhpr1*(y^{**5})$
 $gh52(6,4)=x^{**4}$
 $gh52(6,5)=2.d0*(x^{**3})*y$
 $gh52(6,6)=3.d0*(x^{**2})*(y^{**2})$
 $gh52(6,7)=4.d0*x*(y^{**3})$
 $gh52(6,8)=5.d0*(y^{**4})$

c Gh53 matrix

$gh53(5,1)=rh*(x^{**5})$
 $gh53(5,2)=rh*(x^{**4})*y$
 $gh53(5,3)=rh*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh53(5,4)=rh*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh53(5,5)=rh*x*(y^{**4})$
 $gh53(5,6)=rh*(y^{**5})$
 $gh53(6,7)=rh*(x^{**5})$
 $gh53(6,8)=rh*(x^{**4})*y$
 $gh53(6,9)=rh*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh53(6,10)=rh*(x^{**2})*(y^{**3})$

c Gh54 matrix

$gh54(6,1)=rh*x*(y^{**4})$
 $gh54(6,2)=rh*(y^{**5})$
 $gh54(3,3)=rh*(x^{**5})$
 $gh54(3,4)=rh*(x^{**4})*y$
 $gh54(3,5)=rh*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh54(3,6)=rh*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh54(3,7)=rh*x*(y^{**4})$
 $gh54(3,8)=rh*(y^{**5})$

c A h6 modellhez is szükséges Gh61 matrix

$gh61(1,1)=6.d0*(x^{**5})$
 $gh61(1,2)=5.d0*(x^{**4})*y$
 $gh61(1,3)=4.d0*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh61(1,4)=3.d0*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh61(1,5)=2.d0*x*(y^{**4})$
 $gh61(1,6)=y^{**5}$
 $gh61(2,9)=x^{**5}$
 $gh61(2,10)=2.d0*(x^{**4})*y$
 $gh61(3,1)=-rhpr1*(x^{**6})$
 $gh61(3,2)=-rhpr1*(x^{**5})*y$
 $gh61(3,3)=-rhpr1*(y^{**2})*(x^{**4})$
 $gh61(3,4)=-rhpr1*(x^{**3})*(y^{**3})$
 $gh61(3,5)=-rhpr1*(x^{**2})*(y^{**4})$
 $gh61(3,6)=-rhpr1*x*(y^{**5})$

$gh61(3,7)=-rhpr1*(y^{**6})$
 $gh61(4,2)=x^{**5}$
 $gh61(4,3)=2.d0*(x^{**4})*y$
 $gh61(4,4)=3.d0*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh61(4,5)=4.d0*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh61(4,6)=5.d0*x*(y^{**4})$
 $gh61(4,7)=6.d0*(y^{**5})$
 $gh61(4,8)=6.d0*(x^{**5})$
 $gh61(4,9)=5.d0*(x^{**4})*y$
 $gh61(4,10)=4.d0*(y^{**2})*(x^{**3})$
 $gh61(5,8)=-rh*tau*(x^{**6})$
 $gh61(5,9)=-rh*tau*(x^{**5})*y$
 $gh61(5,10)=-rh*tau*(x^{**4})*(y^{**2})$
 $gh61(6,1)=rh*tau*(x^{**6})$
 $gh61(6,2)=rh*tau*(x^{**5})*y$
 $gh61(6,3)=rh*tau*(x^{**4})*(y^{**2})$
 $gh61(6,4)=rh*tau*(x^{**3})*(y^{**3})$
 $gh61(6,5)=rh*tau*(x^{**2})*(y^{**4})$
 $gh61(6,6)=rh*tau*x*(y^{**5})$
 $gh61(6,7)=rh*tau*(y^{**6})$

c Gh62 matrix

$gh62(2,1)=3.d0*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh62(2,2)=4.d0*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh62(2,3)=5.d0*x*(y^{**4})$
 $gh62(2,4)=6.d0*(y^{**5})$
 $gh62(4,1)=3.d0*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh62(4,2)=2.d0*x*(y^{**4})$
 $gh62(4,3)=y^{**5}$
 $gh62(5,1)=-rh*tau*(x^{**3})*(y^{**3})$
 $gh62(5,2)=-rh*tau*(x^{**2})*(y^{**4})$
 $gh62(5,3)=-rh*tau*x*(y^{**5})$
 $gh62(5,4)=-rh*tau*(y^{**6})$
 $gh62(5,5)=rhpr1*(x^{**6})+6.d0*(x^{**5})$
 $gh62(5,6)=rhpr1*(x^{**5})*y+5.d0*(x^{**4})*y$
 $gh62(5,7)=rhpr1*(x^{**4})*(y^{**2})+4.d0*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh62(5,8)=rhpr1*(x^{**3})*(y^{**3})+3.d0*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh62(5,9)=rhpr1*(x^{**2})*(y^{**4})+2.d0*x*(y^{**4})$
 $gh62(5,10)=rhpr1*x*(y^{**5})+y^{**5}$
 $gh62(5,11)=rhpr1*(y^{**6})$
 $gh62(6,6)=x^{**5}$
 $gh62(6,7)=2.d0*(x^{**4})*y$
 $gh62(6,8)=3.d0*(x^{**3})*(y^{**2})$
 $gh62(6,9)=4.d0*(x^{**2})*(y^{**3})$
 $gh62(6,10)=5.d0*x*(y^{**4})$
 $gh62(6,11)=6.d0*(y^{**5})$

c Gh63 matrix

$gh63(5,1)=rh*(x^{**6})$
 $gh63(5,2)=rh*(x^{**5})*y$
 $gh63(5,3)=rh*(x^{**4})*(y^{**2})$
 $gh63(5,4)=rh*(x^{**3})*(y^{**3})$
 $gh63(5,5)=rh*(x^{**2})*(y^{**4})$
 $gh63(5,6)=rh*x*(y^{**5})$
 $gh63(5,7)=rh*(y^{**6})$
 $gh63(6,8)=rh*(x^{**6})$
 $gh63(6,9)=rh*(x^{**5})*y$
 $gh63(6,10)=rh*(x^{**4})*(y^{**2})$

c Gh64 matrix

```
gh64(3,5)=rh*(x**6)
gh64(3,6)=rh*(x**5)*y
gh64(3,7)=rh*(x**4)*(y**2)
gh64(3,8)=rh*(x**3)*(y**3)
gh64(3,9)=rh*(x**2)*(y**4)
gh64(3,10)=rh*x*(y**5)
gh64(3,11)=rh*(y**6)
gh64(6,1)=rh*(x**3)*(y**3)
gh64(6,2)=rh*(x**2)*(y**4)
gh64(6,3)=rh*x*(y**5)
gh64(6,4)=rh*(y**6)
```

c

c Gamma6 matrix

```
do i=1,6
do j=1,166
if (j.le.16) gg1h6(i,j)=b(i,j)
c h1
if (j.ge.17.and.j.le.25) gg1h6(i,j)=gh21(i,j-16)
if (j.ge.26.and.j.le.34) gg1h6(i,j)=gh22(i,j-25)
c h2
if (j.ge.35.and.j.le.46) gg1h6(i,j)=gh31(i,j-34)
if (j.ge.47.and.j.le.58) gg1h6(i,j)=gh32(i,j-46)
c h3
if (j.ge.59.and.j.le.68) gg1h6(i,j)=gh41(i,j-58)
if (j.ge.69.and.j.le.73) gg1h6(i,j)=gh42(i,j-68)
if (j.ge.74.and.j.le.83) gg1h6(i,j)=gh43(i,j-73)
if (j.ge.84.and.j.le.88) gg1h6(i,j)=gh44(i,j-83)
c h4
if (j.ge.89.and.j.le.98) gg1h6(i,j)=gh51(i,j-88)
if (j.ge.99.and.j.le.106) gg1h6(i,j)=gh52(i,j-98)
if (j.ge.107.and.j.le.116) gg1h6(i,j)=gh53(i,j-106)
if (j.ge.117.and.j.le.124) gg1h6(i,j)=gh54(i,j-116)
c h5
if (j.ge.125.and.j.le.134) gg1h6(i,j)=gh61(i,j-124)
if (j.ge.135.and.j.le.145) gg1h6(i,j)=gh62(i,j-134)
if (j.ge.146.and.j.le.155) gg1h6(i,j)=gh63(i,j-145)
if (j.ge.156.and.j.le.166) gg1h6(i,j)=gh64(i,j-155)
c h6
enddo
enddo
```

A c hj val jellemzet sorig a hj hierarchikus modell gamma matrixát kapjuk meg. Például a c h3 al kijelölt Gamma matrix $\Gamma_{h^{(3)}}(6,58)$ méretű lesz.