

KÜLÖNLENYOMAT

A NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM KÖZLEMÉNYEIBŐL

III. Sorozat, Gépészet, 29. (1984) kötet, 4. füzet, 173 – 182.

HUSZTHY LÁSZLÓ – SZARKA ZOLTÁN

Lengőkaros bűtykös mechanizmusok analitikus vizsgálata

MISKOLC, 1984.

LENGŐKAROS BÜTYKÖS MECHANIZMUSOK ANALITIKUS VIZSGÁLATA

HUSZTHY LÁSZLÓ–SZARKA ZOLTÁN

Összefoglalás

A szerzők a bütykös mechanizmusokkal kapcsolatban az alábbi két feladat megoldását mutatják be: 1. adott mechanizmus által megvalósított mozgás egyenletének meghatározása, 2. a lengőkar adott mozgástörvényét biztosító bütyökgörbe meghatározása. Mindkét feladat megoldására számítógépre jól programozható numerikus eljárást dolgoznak ki.

Bevezetés

A mechanikus vezérlések egyik gyakran alkalmazott fajtája a bütykös mechanizmus (1. ábra).

Az álló tagot, vagy *állványt* az adott koordináta-rendszerben az

$$\mathbf{a} = \{a; 0; 0\}$$

vektorral, a *lengőkart* a

$$\mathbf{b} = \{-b \cos \gamma; b \sin \gamma; 0\}$$

vektorral, a *bütyök* alakját a kezdőhelyzetben ($t = t_0 = 0$ időpontban) leíró görbét az

$$\mathbf{r} = \{r(\varphi) \cos \varphi; r(\varphi) \sin \varphi; 0\}$$

vektorral jellemezzük; a, b, r a megfelelő vektorok hossza, $r = r(\varphi)$ pedig a bütyök kontúrgörbéjét (bütyökgörbét) kezdőhelyzetben, polárkoordinátákban leíró függvény; $r(\varphi) > 0$, egyértékű.

DR. HUSZTHY LÁSZLÓ

egyetemi docens

DR. SZARKA ZOLTÁN

egyetemi docens

NME Matematikai Intézete Analízis Tanszéke

3515 Miskolc-Egyetemváros

Kézirat beérkezett: 1981. június 29.

A bűtyök az $O_1 \equiv O$ pont körül $\omega = \text{állandó}$ szögsebességgel forog; a lengőkar, amely a c sugarú görgővel támaszkodik a bűtyökre, időben periodikus mozgást végez; e mozgást a γ szögnek a t időtől való $\gamma = \gamma(t)$ függése írja le.

Ahhoz, hogy a szerkezet egyáltalán működőképes legyen, szükséges, hogy az

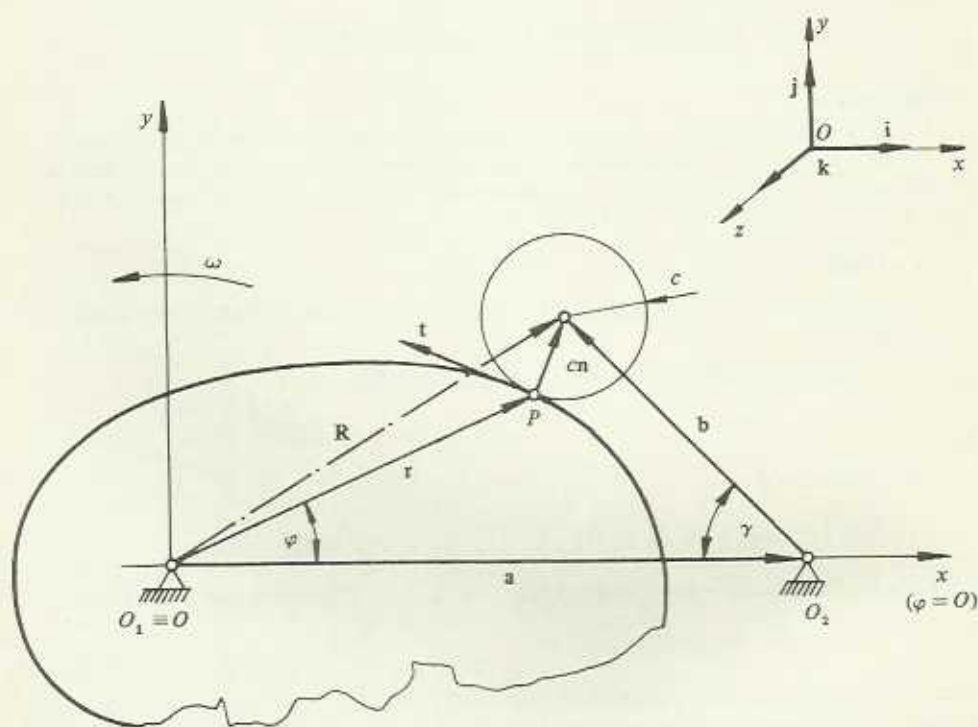
$$r_{\min} + c + b > a$$

egyenlőtlenség fennálljon, tehát a görgő ne válhasson el a bűtyöktől.

Két feladatot tűzünk ki:

1. adott mechanizmus által megvalósított mozgás $\gamma = \gamma(t)$ egyenletének meghatározása,
2. a lengőkar adott $\gamma = \gamma(t)$ mozgástörvényét biztosító bűtyökgörbe meghatározása

Mindkét feladat megoldása ismert, de mi olyan új eljárást mutatunk be a megoldás megkeresésére, amely számítógépre jól programozható.



1. ábra

1. Adott mechanizmusnál keressük a lengőkar

$\gamma = \gamma(t)$ mozgástörvényét

Kezdőhelyzetben, a $t = t_0 = 0$ időpontban, a bűtyökgörbe futópontjához rendelt helyvektor:

$$\mathbf{r} = \{r(\varphi) \cos \varphi; r(\varphi) \sin \varphi; 0\} = \{x(\varphi); y(\varphi); 0\}. \quad (1)$$

A bűtyök és a görgő P érintkezési pontjában a görgő sugara merőleges a bűtyökgörbe P pontbeli érintőjére. A görbe P pontbeli érintővektora:

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\dot{x}(\varphi); \dot{y}(\varphi); 0\}.$$

A „pont” φ szerinti deriváltat jelöl. Ez a vektor növekvő φ -nek megfelelő irányítású.

Az érintő-egységvektor:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \{\dot{x}(\varphi); \dot{y}(\varphi); 0\}.$$

A P pontban a görbe normális egységvektora (az 1. ábrán látható térbeli derékszögű koordinátarendszer i, j, k tengely-egységvektorait felhasználva)

$$\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{k} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \{\dot{y}(\varphi); -\dot{x}(\varphi); 0\}.$$

A bűtyökgörbét körülvevő, tőle c „távolságban” futó ekvidisztans görbét leíró $\mathbf{R}$ vektor:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + c\mathbf{n} = \left\{ x(\varphi) + \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{y}(\varphi); y(\varphi) - \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{x}(\varphi); 0 \right\}. \quad (2)$$

Forgassuk a bűtyköt az ekvidisztans görbével együtt az O_1 pont körül $\omega = 1$ szögsebességgel pozitív értelemben. Ekkor t idő alatt a szögelfordulás is t (a kezdőhelyzethez képest).

Az elforgatott egységvektorok a 2. ábra alapján:

$$\mathbf{e}_1 = \{\cos t; \sin t; 0\}, \quad \mathbf{e}_2 = \{-\sin t; \cos t; 0\}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = \{0; 0; 1\}.$$

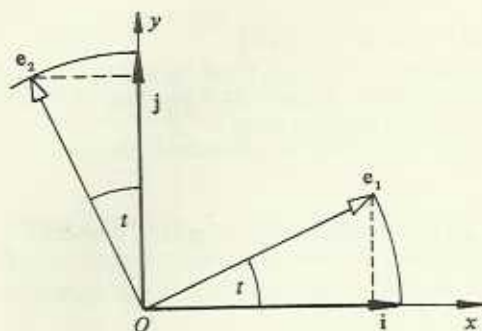
A forgató mátrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A görgő és a bűtyök érintkezését az

$$\mathbf{FR} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (3)$$

egyenlet fejezi ki.



2. ábra

A megfelelő vektorokat behelyettesítve a (3) egyenletbe, a műveletek elvégzése után, a következő skaláris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{y}\right) \cos t - \left(y - \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{x}\right) \sin t &= a - b \cos \gamma, \\ \left(x + \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{y}\right) \sin t + \left(y - \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{x}\right) \cos t &= b \sin \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

A (4) egyenletrendszer első egyenletét $\cos t$ -vel, a másodikat $\sin t$ -vel szorozva és az egyenleteket összeadva, majd az első egyenletet $(-\sin t)$ -vel, a másodikat $\cos t$ -vel szorozva és az egyenleteket összeadva, az előbbi egyenletrendszer az

$$\begin{aligned} x + \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{y} &= a \cos t - b \cos(\gamma + t), \\ y - \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{x} &= -a \sin t + b \sin(\gamma + t) \end{aligned} \quad (5)$$

alakra egyszerűsödik.

Négyzetre emelve az (5) egyenletrendszer egyenleteit, majd összeadva azokat, a részletszámítások mellőzésével, az

$$r^2 + 2c \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}} = a^2 + b^2 - c^2 - 2ab \cos \gamma \quad (6)$$

egyenlethez jutunk.

A bevezetőben rögzített geometriai feltétel biztosítja, hogy ennek az egyenletnek $0 \leq \varphi < 2\pi$ intervallumban van megoldása (γ -ra).

A (4) egyenletrendszer az

$$x + \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{y} = A(\varphi) = A, \quad y - \frac{c}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{x} = B(\varphi) = B$$

jelöléssel

$$A \cos t - B \sin t = a - b \cos \gamma,$$

$$B \cos t + A \sin t = b \sin \gamma.$$

A bevezetésben említett geometriai feltétel folytán ennek az egyenletrendszernek van megoldása a $\cos t$, $\sin t$ ismeretlenekre úgy, hogy a $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ azonosság is fennáll. A megoldás

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{A(a - b \cos \gamma) + Bb \sin \gamma}{A^2 + B^2}, \\ \sin t &= \frac{Ab \sin \gamma - B(a - b \cos \gamma)}{A^2 + B^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

A (6) képletből a bűtők kontúrját leíró $r = r(\varphi)$ függvény ismeretében kiszámítható, hogy a bűtőknek a kezdőhelyzetben φ paraméterű pontja a lengőkar milyen szögállása mellett kerül érintkezésbe a görgővel.

A (7) képletekből — miután az előző lépésben kiszámítottuk az összetartozó φ és γ szögeket — meghatározható a bűtőknek az a t elfordulási szöge, amelynél ez az érintkezés létrejön. $\cos t$ és $\sin t$ külön-külön kiszámításával a t elfordulási szög egyértelműen meghatározható.

Példa. A 3. ábrán vázolt görbe 120° -ot átfogó köríve a működő bűtőkontúr. A rajz a kezdőhelyzetet mutatja. A bűtők kontúrjának egyenlete a kezdőhelyzetben:

$$r = 2 \cos \varphi.$$

Mivel $\dot{r} = -2 \sin \varphi$, $\sqrt{r^2 + \dot{r}^2} = 2$, ezért a (6) képletből

$$\cos \gamma = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi.$$

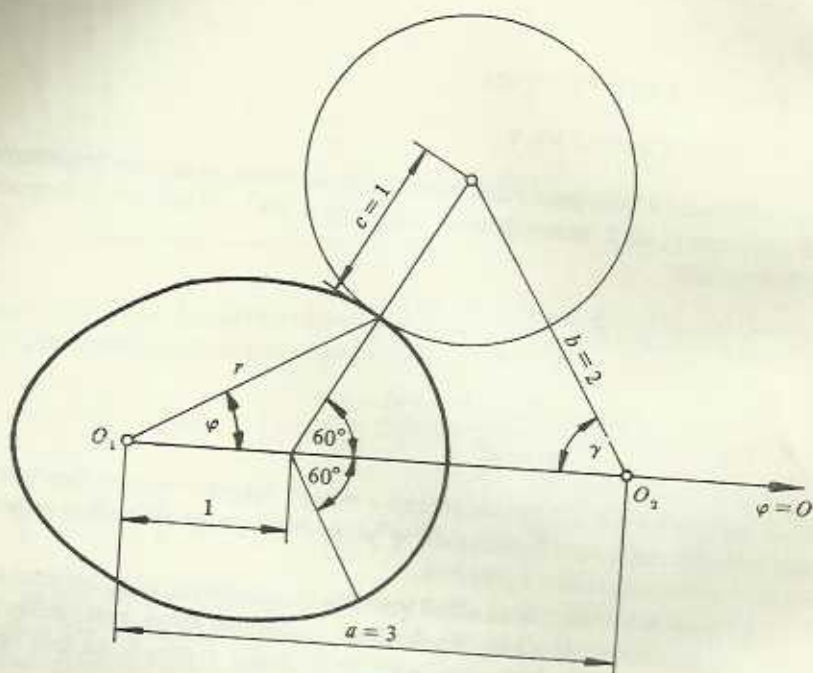
Felhasználva azt, hogy

$$A = 1 + 2 \cos 2\varphi, \quad B = 2 \sin 2\varphi, \quad A^2 + B^2 = 5 + 4 \cos 2\varphi,$$

a (7) képletek felhasználásával

$$\cos t = \frac{3 - 2 \cos \gamma + 6 \cos 2\varphi - 4 \cos (2\varphi + \gamma)}{5 + 4 \cos 2\varphi}$$

$$\sin t = \frac{2 \sin \gamma - 6 \sin 2\varphi + 4 \sin (2\varphi + \gamma)}{5 + 4 \cos 2\varphi}.$$



3. ábra

Ha például $\varphi = 30^\circ$, akkor $\gamma = 60^\circ$. Ekkor $t = 0$, vagyis a kezdőhelyzetnek megfelelő érték.

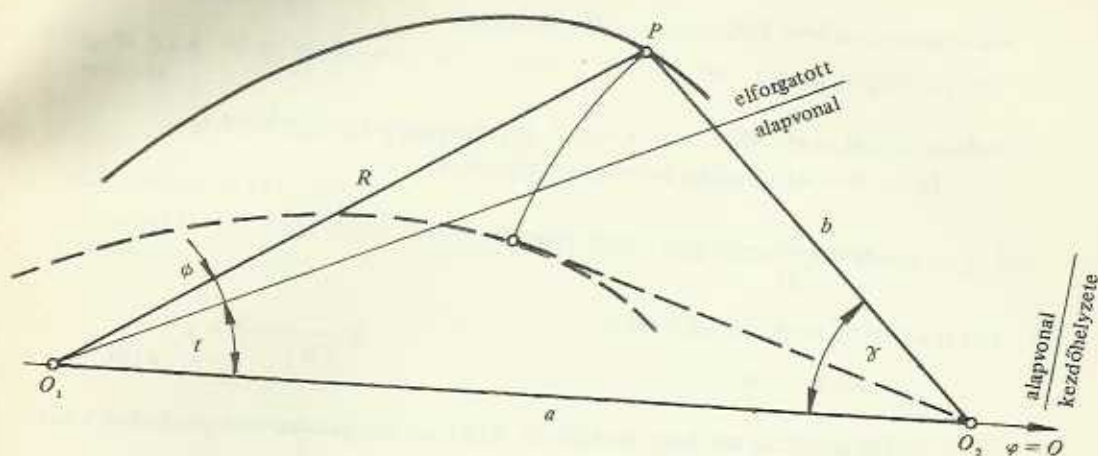
2. A lengőkar előírt mozgását megvalósító bütyök alakjának meghatározása

Adottak az a, b, c hosszúságok (az 1. ábrának megfelelően), és a lengőkarnak az állvánnyal bezárt szöge az idő függvényében:

$$\gamma = \gamma(t).$$

Keressük a bütyök kontúrjának $r = r(\varphi)$ egyenletét.

A 4. ábrán a szaggatott vonal az ekvidisztans görbe és a lengőkar állását mutatja a $t=0$ időpontban (kezdőhelyzetben).



4. ábra

A kezdőhelyzetből t idő múlva az ekvidisztans görbe t szöggel elfordult helyzetbe kerül (4. ábra, folytonos vonal). A lengőkar ekkor γ szöget zár be az állvánnyal. Ebben a pillanatban az ekvidisztans görbének át kell mennie a b lengőkar-hossz és a t időponthoz tartozó $\gamma(t)$ szög által meghatározott P ponton. A ϕ szög az ekvidisztans görbe P pontjához tartozó – kezdőhelyzetbeli – polárszöget jelöli.

Az $O_1 O_2 P$ háromszögből

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma(t)}. \quad (8)$$

Ugyanebből a háromszögből

$$\sin(t + \phi) = \frac{b \sin \gamma(t)}{R}. \quad (9)$$

A (8) és (9) felhasználásával felírható az ekvidisztans görbe $R = R(\phi)$ polárkoordinátás egyenlete.

A gyakorlatban az $R = R(\phi)$ függvény csak a legritkább esetben állítható elő zárt alakban. Ezért a függvényt legtöbbször numerikusan (táblázatos alakban) határozzuk meg.

A $0 \leq t < 2\pi$ intervallumban növekvő (általában ekvidisztans) t értékeket felvéve:

- a (8) felhasználásával kiszámítható az adott t időponthoz tartozó R rádiusz,
- a (9) egyenletből pedig a megfelelő ϕ polárszög.

Legyen az ekvidisztans görbét leíró R vektor

$$R = \{R(\phi) \cos \phi; R(\phi) \sin \phi; 0\} = \{X(\phi); Y(\phi); 0\}. \quad (10)$$

Az 1. pontban, a bűtyökgörbe

$$\mathbf{r} = \{r(\varphi) \cos \varphi; r(\varphi) \sin \varphi; 0\}$$

vektorikus egyenletét felhasználva, a $\mathbf{R}$ vektort a

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + c\mathbf{n}$$

alakban állítottuk elő, ahol $\mathbf{n}$ az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$ görbe normális egységvektora.

Ha az $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\varphi)$ görbe normális egységvektora

$$\mathbf{N} = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{|\dot{\mathbf{R}}|} \times (-\mathbf{k}) \quad (|\mathbf{R}| = R), \quad (11)$$

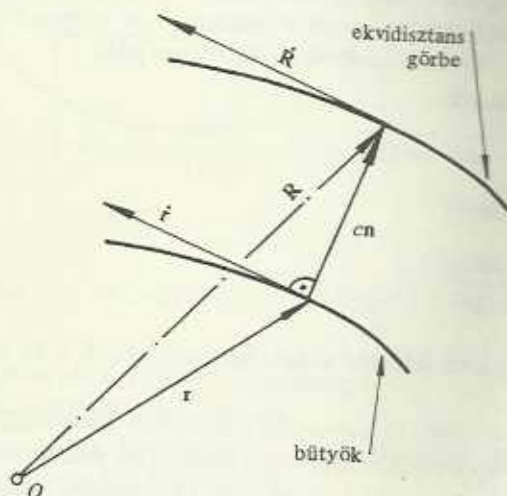
akkor a bűtyök kontúrját leíró vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + c\mathbf{N}. \quad (12)$$

Itt felhasználtuk azt, hogy az $\mathbf{r}(\varphi)$ és $\mathbf{R}(\varphi)$ görbék összetartozó pontjaiban a normálisok párhuzamosak (5. ábra), azaz

$\mathbf{n} \parallel \mathbf{N}$, vagy ami ugyanaz: $\dot{\mathbf{r}} \parallel \dot{\mathbf{R}}$.

Ez utóbbi állítást bebizonyítjuk.



5. ábra

Mivel $\mathbf{n}$ egységvektor, ezért

$$\mathbf{n} \mathbf{n} = 1.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát deriválva,

$$2\dot{\mathbf{n}}\dot{\mathbf{n}} = 0,$$

vagyis $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{n}}$. Mivel $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{r}}$, ezért $\dot{\mathbf{n}} \perp \dot{\mathbf{r}}$, azaz $\dot{\mathbf{n}} = \lambda \dot{\mathbf{r}}$. Az $\mathbf{R} = \mathbf{r} + c\mathbf{n}$ vektorfüggvény deriváltja

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + c\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{r}} + \lambda\dot{\mathbf{r}} = (1 + \lambda)\dot{\mathbf{r}},$$

tehát valóban $\dot{\mathbf{R}} \parallel \dot{\mathbf{r}}$.

A (11) és (12) egyenletek felhasználásával végül a bűtyökgörbe pontjainak x, y koordinátái

$$\begin{aligned} x &= X - \frac{c}{|\dot{\mathbf{R}}|} \dot{Y}, \\ y &= Y + \frac{c}{|\dot{\mathbf{R}}|} \dot{X}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{ahol } |\dot{\mathbf{R}}| = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}.$$

Tekintettel arra, hogy $X = X(\phi)$ és $Y = Y(\phi)$ értékei numerikusan adóttak, x és y értékeit e numerikus adatokból kell meghatároznunk. A (9) egyenlethől számított ϕ értékek általában nem lesznek ekvidisztansak. Ezért $\dot{X}$ és $\dot{Y}$ numerikus kiszámításánál úgy célszerű eljárni, hogy három, egymás melletti X (ill. Y) értéket felvéve, e három pontra egy Lagrange-féle interpolációs polinomot fektetve, számítjuk ennek a másodfokú polinomnak a deriváltját a középső pontban. Ezzel azt érjük el, hogy a deriváltak számításában elkövetett hiba másodrendben kicsiny.

Megjegyezzük, hogy e számítási módszernél a bűtyökgörbe valamely pontjának x, y koordinátái nincsenek befolyással egy másik pont koordinátáira. Így a pontok koordináta-hibái függetlenek egymástól, vagyis a hibák nem halmozódnak.

A számítási módszert gépesítettük. Olyan FORTRAN nyelvű programot készítettünk, amely a bűtyökgörbe Descartes-féle és poláris koordinátáit sornyomatotán kinyomtatja, a görbe DIGIGRÁF-fal való kirajzoltatásához szükséges lyukszalagot előállítja, továbbá előállítja a bűtyök CNC gépen való megmunkálásához szükséges lyukszalagot is.

ANALYTICAL INVESTIGATION OF SWINGING ARM CAM MECHANISMS

by

L. HUSZTHY-Z. SZARKA

Summary

Solutions of the following two problems are given: 1. Determination of the equation for the motion realized by a given mechanism. 2. Determination of the cam curve warranting the given law of motion for the swinging arm. For the solution of both problems, numerical procedures, well suitable for computer programming, are developed.

ANALITISCHE UNTERSUCHUNG VON SCHWENKARMIGEN NOCKENFÖRMIGEN MECHANISMEN

von

L. HUSZTHY-Z. SZARKA

Zusammenfassung

Es werden die Lösungen der folgenden zwei Aufgaben dargestellt: 1. Die Bestimmung der Gleichung einer durch gegebenen Mechanismus verwirklichten Bewegung. 2. Die Bestimmung der Nockenkurve, durch die das gegebene Bewegungsgesetz des Schwenkarms gewährleistet wird. Für die Lösung der beiden Aufgaben entwickeln die Verfasser ein gut programmierbares numerisches Verfahren.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧАЮЩИХСЯ РЫЧАЖНЫХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Л. ХУСТИ-З. САРКА

Резюме

Показано решение ниже следующих двух задач: 1. Определение уравнения движения осуществленного данным механизмом. 2. Определение кривой кулачка обеспечивающей данный закон движения балансира. Для решения обеих задач разработан численный метод, который легко может быть программирован на вычислительную машину.