

MEGJEGYZÉSEK A FOGASKEREK FOGSÚRLÓDÁSI VESZTESÉGÉNEK SZÁMÍTÁSÁHOZ

HUSZTHY LÁSZLÓ*

[Beérkezett 1975. február 24-én]

Fogaskerékpárok fogsúrlódási veszteségeivel számos könyv és szakcikk foglalkozik. A különböző szerzők által — evolvens fogazatú kerékpárookra — levezetett és lényegükben egyenértékű képletekben a súrlódási tényező valamilyen kísérlettel meghatározott átlagérték. E cikk az „átlagos” súrlódási tényező értelmezését kívánja pontosabbá tenni, ill. azokat a feltételeket tisztázni, amelyek mellett a fogsúrlódási veszteségre vonatkozó összefüggések érvényesek.

Jelölések

- a = tengelytáv,
- d_1, d_2 = a kis, ill. a nagy kerék gördülőkörének átmérője,
- e_1, e_2 = kapcsolószakasz-hosszak a főponttól a fejkörökig,
- i = áttétel,
- k, l = a kettős kapcsolódásnak megfelelő szakaszok hossza a kapcsolóvonalon,
- r_1, r_2 = a kis, ill. a nagy kerék gördülőkörének sugara,
- r_{a1}, r_{a2} = a kis, ill. a nagy kerék alapkörének sugara,
- t = osztás,
- t_a = alaposztás,
- u_1, u_2 = egyedi kapcsolódási szakaszok hossza a kapcsolóvonalon,
- v = kerületi sebesség a főpontban,
- v_1, v_2 = a kis, ill. a nagy kerék fogprofiljához érintőleges sebesség-összetevők a kapcsolódási pontban,
- v_a = az átlagos csúszási sebesség a fogak között,
- $v_r = v_1 - v_2$ = relatív csúszási sebesség a fogak között,
- $v_s = v_1 + v_2$ = ún. szállító sebesség,
- z_1, z_2 = a kis, ill. a nagy kerék fogszáma,
- x, y = koordináták,
- A, E = a kapcsolószakasz végpontjai,
- E_1, E_2 = az egyedi kapcsolószakasz végpontjai,
- C = főpont,
- F_n = a normális irányú fogerő nagysága,
- M = forgató nyomaték,
- P = teljesítmény,
- W_0 = az időegységre eső fogsúrlódási munka,
- W_a = a kapcsolóvonal t_a alaposztásnyi szakaszára eső fogsúrlódási munka,
- W_k = egy fogpár kapcsolódásának időtartamára eső fogsúrlódási munka,
- α = kapcsolószög,
- e = kapcsolószám,
- ξ = a kenőanyag viszkozitása,
- η = hatásfok,
- μ = súrlódási tényező,
- τ = idő,
- ω_1, ω_2 = a kis, ill. a nagy kerék szögsebessége.

Az ezektől esetenként eltérő jelölések magyarázata a szövegben megtalálható.

* Huszthy László, 3552 Miskolc, Rácz Ádám u. 13.

Bevezetés

A gyakorlatban a fogaskerékpárok méretezésének többféle elve valósul meg aszerint, hogy a hajtómű milyen célra készül, milyen várható üzemi viszonyok között fog működni. A rendkívül bő irodalomban megtalálhatók azok a méretezési eljárások, amelyek a tervezett fogaskerékpárnál a hosszú élettartamot, a nagy szilárdságot (töréssel és felületi károsodással szemben), a hidrodinamikai kenésállapot megvalósításának lehetőségét, a nyugodt, zajtalan járást stb. biztosítják, ill. esetleg több kedvező tulajdonság együttes elérését célozzák [2], [3], [11], [12], [14].

A fogaskerék-hajtóművek alkalmazási területein a fogsúrlódási veszteségnek általában nincs különösebb jelentősége. Megfelelő anyagból készült, pontosan megmunkált és szerelt, jól karbantartott hajtóműveknél egy-egy kerékpár fogsúrlódási veszteségének százalékos értéke általában elhanyagolható az átvitt teljesítményhez képest ($0,2 \div 1,5\%$).

Mégis vannak esetek, amikor a fogsúrlódási veszteség lényeges nagyságú lehet, illetve amikor a súrlódás a fogakon károsodást okozhat.

THOMAS „Die Tragfähigkeit der Zahnräder” c. könyvében [12] megemlíti: „Egészen kis fordulatszámoknál a kis csúszási sebesség miatt fémes súrlódással és ezért aránylag kisebb élettartammal kell számolni — kb. felcakkorával, mint közepes fordulatszámoknál — . . . egészen nagy fordulatszámoknál a kenőanyag kicsapódása miatt éppúgy fémes súrlódás lép fel. Ilyen kerekek már kis terhelésnél is hajlamosak a hőnfutásra és a berágódásra.”

DUDLEY „Gear Handbook”-jában [3] arra is felhívja a figyelmet, hogy „. . . ha gyorsító hajtással kell teljesítményt átvinnünk a lehető legkevesebb energiavesztéssel, . . . a csúszást a lehető legkisebb értéken kell tartani; . . . a gyorsító hajtás a legérzékenyebb a fogak közötti súrlódásra”. Továbbá: „Gyorsító hajtásoknál a nagyobb határfoknak figyelemreméltó jelentősége lehet; megtörténtek esetek, amikor a nagy súrlódás és elégtelen kenés miatt a gyorsító hajtómű önzáró lett.” (Nagy súrlódási tényező esetén a hajtott kerékre ható normális irányú fogerő és a súrlódási erő eredője a kapcsolódás belépő szakaszában erősen eltérhet a fognormális irányától a hajtott kerék tengelye felé, így az átvitt forgatónyomaték lényegesen csökkenhet; gyorsító hajtásnál a kapcsolódás belépő szakaszában a hajtó kerék fogának lábrészén bemélyedés, a hajtott kerék fogának fejrészén dudor keletkezik [13], ami fékező hatású.)

Nagy teljesítmények átvitelekor a fogsúrlódási veszteség — ha százalékosan nem is —, de nagy értéket tehet ki, ilyen esetekben feltétlenül hasznos a súrlódás csökkentése [11].

A súrlódási hő elvezetése szempontjából mindenképpen lényeges a fogsúrlódási veszteség értékének ismerete, és lehetőleg csökkentése.

A következőkben az egyenes fogú hengeres fogaskerékpárok fogsúrlódási veszteségének számításával kapcsolatban teszünk néhány megjegyzést.

Feltesszük, hogy pontosan gyártott és szerelt hajtóművekről van szó.

1. A fogsúrlódási veszteségekről általában

Fogaskerekek kapcsolódásakor a fogsúrlódási teljesítmény pillanatnyi értéke

$$P = \mu F_n |v_r|. \quad (1)$$

Ha egy fogaskerékpár a tengelytávon i áttétellel működik, és az egyik kerék (általában a kis kerék) fogprofilját valamilyen $\tau = 0$ időpontban alkalmas koordináta-rendszerben (1. ábra) az

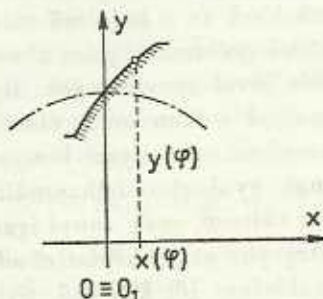
$$x = x(\varphi) \quad (2)$$

$$y = y(\varphi)$$

egyenletek írják le, ahol φ geometriai paraméter, akkor az ezzel kapcsolódó másik kerék fogprofilját leíró egyenletek is egyértelműen kiadódnak, és meghatározható a kapcsolódó fogprofilok relatív csúszási sebessége, valamint a normális irányú fogerő is a kapcsolódási pontban.*

A fogsúrlódási teljesítmény (1) képletében v_r kiszámítása a legegyszerűbb. A [6] szerinti, (29) összefüggés alapján

$$|v_r| = \frac{\omega_1}{i} \sqrt{a^2 - 2a(1+i)(x \sin \omega_1 \tau + y \cos \omega_1 \tau) + (1+i)^2(x^2 + y^2)} \quad (3)$$



1. ábra

* A φ paraméter konkrét jelentése e cikk további fejtegetéseiben nem lényeges; e paraméter geometriai jellegének van jelentősége (φ lehet szög, ívhossz, távolság stb.). U.i. ha a sík-görbe profil leírására a $z = x(\varphi) + jy(\varphi)$ síkvektort (komplex számot) használjuk (j a képzetes egység), akkor a $z' = x'(\varphi) + jy'(\varphi)$ derivált jelentése a profil valamely pontjabeli érintővektor, míg a forgó profil $z = x(\varphi; \tau) + jy(\varphi; \tau)$ vektorának τ szerinti deriváltja sebesség jellegű.

és fennáll még a [6] cikk (13) képletének megfelelően a

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{\omega_1} \left[\arcsin \frac{(1+i)(xx' + yy')}{a\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \arctan \frac{y'}{x'} \right] \quad (4)$$

$x' \neq 0$

összefüggés is. (A vesszős jelölés φ szerinti deriváltat jelent.)

A (4) összefüggés kapcsolatot létesít a kezdő helyzetben adott profil tetszőleges pontjának φ paramétere és azon τ időpont között, amelyben a kérdéses φ paraméterű pont kapcsolódási helyzetbe kerül.

A (3) és (4) összefüggés egybevetésével $|v_r|$ kifejezhető csak φ -nek, vagy csak τ -nak a függvényeként.

Nagy terhelések esetén a fogak (és a hajtómű többi elemei is) deformálódnak ugyan, de ezek a deformációk nincsenek lényeges befolyással a $v_r(\tau)$ függvényre.

Nagyobb gondot okoz az F_n normális irányú fogerő kiszámítása. Ha a fogak alakja matematikailag pontos (pontosan eleget tesz az $i =$ állandó feltételnek), továbbá csak olyan kis terhelések vannak, vagy a hajtómű felépítése olyan merev, hogy nincsenek számottevő deformációk, akkor az egyik kerék fogprofilját meghatározó (2) függvények az F_n erő nagyságát is meghatározzák: [6] (40) képlete szerint

$$F_n = M_1 \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{xx' + yy'} \quad (5)$$

és itt is érvényes a (4) összefüggés, amelynek segítségével F_n is felírható vagy csak φ , vagy csak τ függvényeként. Feltesszük, hogy a fognyomás eloszlása a fog hossza mentén egyenletes.

Ha azonban nagy terhelések és a hajtómű szerkezeti kialakítása miatt a hajtómű elemein számottevő deformációk keletkeznek, akkor a fognyomás eloszlása a fog hossza mentén jóval bonyolultabb. Ilyen esetekre is van megfelelő számítási eljárás, amellyel a fognyomás eloszlása jó közelítéssel meghatározható [15], ekkor azonban már olyan bonyolult kifejezés adódik az $F_n|v_r|$ szorzatra, hogy annak gyakorlati felhasználása igen nehézkes volna. A fognyomás pontról pontra változó, csak annyi igaz, hogy a fognyomásnak a fog hossza mentén vett integrálja az (5) képlettel adott erővel egyenlő.

A fogsúrlódásnak a valóságot jól közelítő, tisztán elméleti számítását a súrlódási tényezőt leíró függvény bonyolultsága teszi szinte lehetetlenné.

A súrlódási tényező sok változótól függ [1], [7], [8], [9], [10], [13]. Az irodalomban megtalálható részletek mellőzésével csak azokat a lényegesebb paramétereket soroljuk fel, amelyek a súrlódási tényező értékét erősen befolyásolják:

a kapcsolódó profilok alakja,

a fogfelületek érdessége,

a fogak anyagjellemzői,
 a fogak relatív csúszási sebessége,
 a kenőanyag pillanatnyi viszkozitása,
 a súrlódási állapot (tisza fémes súrlódás, határréteg-súrlódás, többé-
 kevésbé hidrodinamikai kenésállapot),

a fogfelületeket bevonó esetleges oxidréteg, szennyeződés, stb.

A felsorolt paraméterek egymással is igen bonyolult kapcsolatban vannak, hogy csak a legfontosabbakat említsük:

terhelés alatt a fogak — a hajtómű elemeivel bonyolult összefüggésben — deformálódnak,

a deformációk megváltoztatják a fognyomás eloszlását,

a kenőanyag viszkozitása erősen változik a hőmérséklettel,

a mechanikai erőhatások, de a kenőanyag jelenléte miatt is a fogak felületi rétegeiben megváltoznak az anyagjellemzők stb.

A kísérletekre támaszkodó, részben empirikus képletek segítségével elvileg lehetséges volna a súrlódási tényezőnek a kapcsolódás alatti időbeli változását leíró $\mu(\tau)$ függvény, vagy a $\mu(\varphi)$ függvény megszerkesztése; így a pillanatnyi súrlódási teljesítmény felírható lenne $P(\tau)$ vagy $P(\varphi)$ alakban, s ezzel vizsgálni lehetne a súrlódási teljesítményt időpontról időpontra, vagy profilpontról profilpontra a legkülönbözőbb fogazatoknál is. Egy ilyen $P(\tau)$ vagy $P(\varphi)$ függvény azonban rendkívül bonyolult, ha viszont a számítás könnyítése céljából elhanyagolásokat teszünk, az amúgy is viszonylagosan kis súrlódási veszteség számértékének megbízhatósága irreálissá válik.

2. Az evolvens fogazat fogsúrlódási vesztesége

a) Ha $\omega_1 =$ állandó, akkor a profilok kapcsolódási pontja $r_{a1}\omega_1 =$ állandó sebességgel futja be az \overline{EA} kapcsolószakaszt (2. ábra). Ebben az esetben a kapcsolóvonal egyúttal egyenletes beosztású időtengelynek is tekinthető. Ha a C főponthoz rendeljük a $\tau = 0$ időpontot, akkor

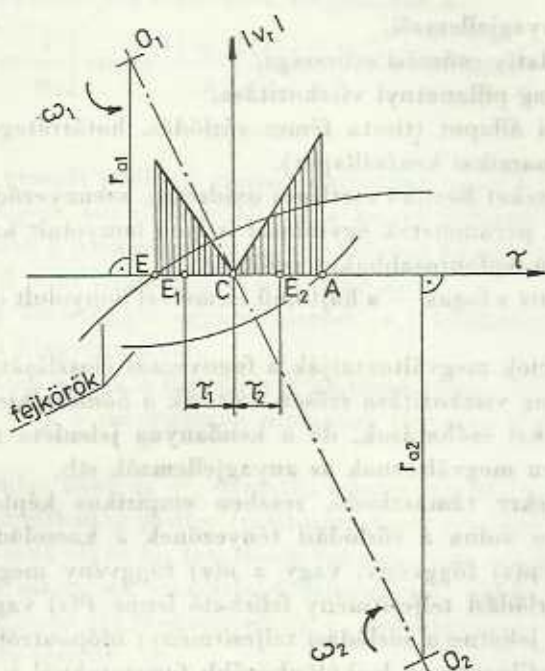
$$|v_r| = (\omega_1 + \omega_2)r_{a1}\omega_1|\tau|. \quad (6)$$

Ha feltesszük, hogy $\mu =$ állandó, akkor az egyedi kapcsolódás $\overline{K_1K_2}$ szakaszán a súrlódási munka [5] szerint:

$$\begin{aligned} W &= \mu F_n \int_{-\tau_1}^{\tau_2} |v_r| d\tau = \mu F_n (\omega_1 + \omega_2) r_{a1} \omega_1 \int_{-\tau_1}^{\tau_2} |\tau| d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \mu F_n (\omega_1 + \omega_2) r_{a1} \omega_1 (\tau_1^2 + \tau_2^2). \end{aligned}$$

Mivel

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = \left(\frac{\overline{E_1 C}}{r_{a1} \omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\overline{CE_2}}{r_{a1} \omega_1} \right)^2 = \frac{\overline{E_1 C^2} + \overline{E_2 C^2}}{r_{a1}^2 \omega_1^2},$$



2. ábra

illetve

$$\overline{E_1C} = u_1$$

$$\overline{E_2C} = u_2$$

jelöléssel

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{r_{o1}^2 \omega_1^2},$$

ezért

$$W = \frac{1}{2} \mu F_n \frac{\omega_1 + \omega_2}{r_{o1} \omega_1} (u_1^2 + u_2^2). \quad (7)$$

Ha $\varepsilon = 1$, akkor $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$ és

$$W_k = \frac{1}{2} \mu F_n \frac{\omega_1 + \omega_2}{r_{o1} \omega_1} (e_1^2 + e_2^2). \quad (8)$$

Állandó súrlódási tényező és egyedi kapcsolódás esetén a pillanatnyi súrlódási teljesítmény (1) alapján $|v_r|$ értékével arányos (3. ábra). A (7) szerinti súrlódási munka a grafikon alatti területtel arányos.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor kettős kapcsolódás is van (4. ábra).

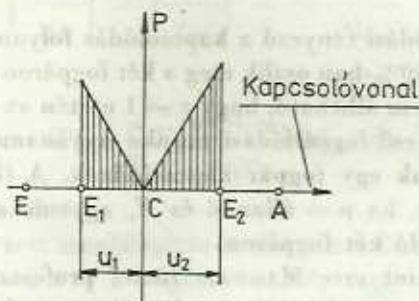
Tegyük fel egyelőre, hogy $\mu = \text{állandó}$ és hogy a kettős kapcsolódás k , ill. l szakaszain az F_n normális irányú fogerő fele-fele arányban oszlik meg az egyidejűleg kapcsolódó két fogpáron. Ekkor az egyes szakaszokon a súrló-

dási teljesítményt a 4. ábra grafikonja mutatja; a súrlódási munka a grafikon alatti területtel arányos.

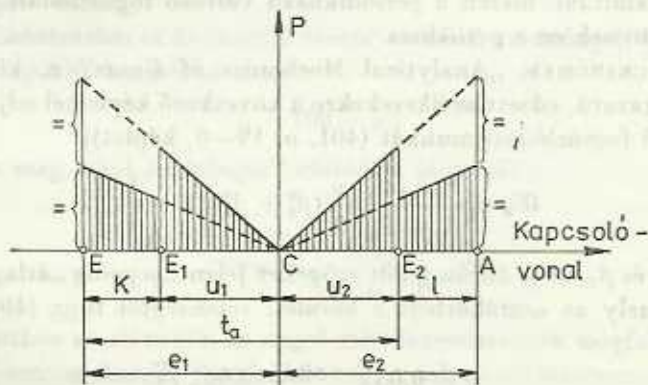
Mialatt egy kiválasztott fogpár kapcsolódási pontja $E \rightarrow A$ irányban végigfut a kapcsolóhosszon, az elfogyasztott súrlódási munkát — most már csak a szemléletre támaszkodva — a következőképpen kapjuk:

Összeadjuk a kettős kapcsolódás k , ill. l szakasza feletti területeket (miközben u_1 a vizsgált fogpár kapcsolódási pontja az $\overline{EE_1}$ szakaszt végigfutja, ezzel *egyidőben* futja be a szomszédos — előző — fogpárnak az előbbitől t_a távolságban levő kapcsolódási pontja az $\overline{E_2A}$ szakaszt), ehhez hozzáadjuk az egyedi kapcsolódás u_1, u_2 szakaszai feletti területeket, végül az így kapott összeghez még egyszer hozzáadjuk a k és l szakaszok feletti területeket (ui. a vizsgált fogpár $\overline{E_2A}$ szakaszbeli kapcsolódásával *egyidőben* futja be a szomszédos — következő — fogpár kapcsolódási pontja az $\overline{EE_1}$ szakaszt).

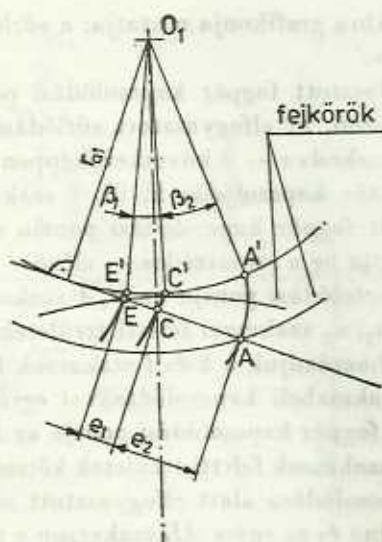
Mivel így a k és l szakaszok feletti területek kétszerese szerepel az összegben, az egy fogpár kapcsolódása alatt elfogyasztott súrlódási munka ugyanannyi, mintha $\epsilon = 1$ volna és az egész \overline{AE} szakaszon a teljes F_n fogerő működnék egyetlen fogpáron, tehát a (8) keplet ekkor is helyes.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Valójában a súrlódási tényező a kapcsolódás folyamán változó és az F_n erő sem pontosan $50 \div 50\%$ -ban oszlik meg a két fogpáron a kettős kapcsolódás alatt, ezért általában nem állítható, hogy $\varepsilon \neq 1$ esetén az egy fogpár kapcsolódásának időtartamára eső fogsúrlódási munka ugyanannyi volna, mintha az egész \overline{AE} szakszon csak egy fogpár kapcsolódnék. A (8) képlet tehát csak akkor igaz, $\varepsilon \neq 1$ -re is, ha $\mu =$ állandó és F_n egyenlő arányban oszlik meg az egyidőben kapcsolódó két fogpáron.

Egyébként — mint erre MAGYAR József professzor felhívta a szerző figyelmét — ésszerűbb a fogsúrlódási munkát nem egy fogpár teljes kapcsolódásának időtartamára, hanem a $t_a = \overline{EE_2}$ szakasz befutásához szükséges időtartamra számítani, hiszen a periodikusan változó fogsúrlódási teljesítményt leíró függvénynek ez a periódusa.

b) BUCKINGHAM „Analytical Mechanics of Gears” c. könyvében [2] evolvens fogazatú, edzett acélkerekekre a következő képlettel adja meg az időegységre eső fogsúrlódási munkát (401. o. 19–6. képlet):

$$W_0 = \frac{F_n r_{a1} \omega_1}{\beta_1 + \beta_2} \left[\frac{\mu}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2) \left(1 + \frac{1}{i} \right) \right]. \quad (9)$$

Itt β_1 és β_2 az 5. ábrán jelölt szögeket jelenti, μ pedig „átlagos” súrlódási tényező, amely az osztókörbeli v kerületi sebességtől függ (406. o. 19–12. képlet):

$$\mu = 0,05 e^{-0,125v} + 0,002 \sqrt{v}, \quad (10)$$

itt v dimenziója láb/perc.

Hasonló összefüggések találhatók [2]-ben más anyagú kerekre is.

Megjegyzés. A hivatkozott könyvben a W_0 munkára vonatkozó képlet hibás; az egyenlőségjel utáni tört nevezőjében a könyvben $\beta_1 + \beta_2$ helyett $W_1 + W_2$ áll, ami a könyv jelölései szerint a hajtó kerék által a kapcsolódás belépő, ill. kilépő szakaszán leadott munka.

Ha figyelembe vesszük, hogy a $\beta_1 + \beta_2$ szög befutásához szükséges idő-tartam

$$\tau_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\omega_1},$$

akkor egy fogpár teljes kapcsolódási tartományában a fogsúrlódási munka

$$\begin{aligned} W_k &= W_0 \tau_{12} = \frac{F_n r_{a1} \omega_1}{\beta_1 + \beta_1} \left[\frac{\mu}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2) \left(1 + \frac{1}{i} \right) \right] \frac{\beta_1 + \beta_2}{\omega_1} = \\ &= \frac{\mu}{2} F_n r_{a1} (\beta_1^2 + \beta_2^2) \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \frac{\mu}{2} F_n r_{a1} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} (\beta_1^2 + \beta_2^2). \end{aligned}$$

Az 5. ábrából leolvasható, hogy

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \left(\frac{E'C'}{r_{a1}} \right)^2 + \left(\frac{C'A'}{r_{a1}} \right)^2 = \frac{EC^2 + CA^2}{r_{a1}^2} = \frac{e_1^2 + e_2^2}{r_{a1}^2},$$

így végül

$$W_k = \frac{\mu}{2} F_n \frac{\omega_1 + \omega_2}{r_{a1} \omega_1} (e_1^2 + e_2^2),$$

ami azonos a (8) képlettel.

Az a) pontban tett megállapítások alapján a Buckingham-féle (9) képlet — amely formailag az $\varepsilon = 1$ kapcsolószámú, vagy $\varepsilon \neq 1$ mellett a kettős kapcsolódás tartományában $F_n/2 - F_n/2$ erőmegoszlású és állandó súrlódási együtthatójú esetet tükrözi, csak úgy használható, ha μ kísérlettel meghatározott „átlagos” érték.

c) A „Lubrication of Industrial Gears” c. Shell-kiadvány [9] az evolvens fogazatú kerékpárok hatásfokára az

$$\eta = 100 - \mu \delta \quad (11)$$

képletet adja meg, ahol μ „átlagos” súrlódási tényező:

$$\mu = \frac{3,5}{\zeta^{0,25} \sin \alpha \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \right)^{0,5} \cdot v^{0,5}} \quad (12)$$

ebben a képletben az állandók az angol mértékrendszernek megfelelő értékek, ζ dimenziója centistokes, az átmérőké inch, a sebességé láb/perc.

A (11)-ben szereplő alaktényező:

$$\delta = \frac{100}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2}. \quad (13)$$

Megfelelő átalakításokkal

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{100}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = 100 \left(\frac{1}{2r_1 \cos \alpha} + \frac{1}{2r_2 \cos \alpha} \right) \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = \\ &= 100 \left(\frac{1}{2r_{a1}} + \frac{1}{2r_{a2}} \right) \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = 100 \frac{r_{a1} + r_{a2}}{2r_{a1}r_{a2}} \cdot \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = \\ &= 100 \frac{r_{a2} + 1}{2r_{a1}} \cdot \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = 100 \frac{\omega_2 + 1}{2r_{a1}} \cdot \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = \\ &= 100 \frac{\omega_1 + \omega_2}{2r_{a1}\omega_1} \cdot \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_1 + e_2} = 100 F_n \frac{\omega_1 + \omega_2}{2r_{a1}\omega_1} \cdot \frac{e_1^2 + e_2^2}{F_n(e_1 + e_2)}. \end{aligned}$$

Itt az utolsó tört nevezőjében álló $F_n(e_1 + e_2)$ kifejezés az egy fogpár kapcsolódása alatt *bevezetett* munka.

Végül

$$\begin{aligned} \eta &= 100 - \mu\delta = 100 - 100\mu F_n \frac{\omega_1 + \omega_2}{2r_{a1}\omega_1} \cdot \frac{e_1^2 + e_2^2}{F_n(e_1 + e_2)} = \\ &= 100 \left[1 - \frac{\mu}{2} F_n \frac{\omega_1 + \omega_2}{r_{a1}\omega_1} \frac{(e_1^2 + e_2^2)}{W_{\text{bevezetett}}} \right]. \end{aligned}$$

Ez a képlet megfelel a hatásfok definíciójának, a zárójelben álló tört számlálója azonos a (8) szerinti fogsúrlódási munkavesztéssel.

μ ebben a képletben is kísérlettel megállapított „átlagos” érték.

Az említett Shell-kiadvány a súrlódási tényező mérésére a korong-kísérletekre hivatkozik; ilyenek más irodalomban is megtalálhatók (pl. [10]). Egymáshoz nyomott, alkotó mentén érintkező, egymással szemben forgó korongokkal végzik ezeket a kísérleteket. A korongok sugarának, a nyomóerő nagyságának, a korongok kerületi sebességének és a kenőolaj viszkozitásának változtatásával képletbe foglalható összefüggéseket kaptak a súrlódási tényező és annak paramétereit között.

A szerző megítélése szerint ezeknek a képleteknek a felhasználása fogsúrlódási veszteség számítására vitatható. Igaz, hogy a profilok kapcsolópontbeli görbületének és a csúszási sebességeknek a kapcsolódás közbeni változása matematikailag pontosan leírható, már sokkal nehezebb a súrlódási tényezőre lényeges befolyással levő deformációk figyelembe vétele és az olaj viszkozitásának a hőmérséklettel való változása konkrét fogaskerékpár esetén erősen eltérhet a korong-kísérleteknél tapasztalt változásoktól.

3. Általános megjegyzések

a) Az előzőkben „átlagos”-nak mondott súrlódási tényező a $\mu(\tau)$ függvénynek *nem* a kapcsolódás időtartamára számított, matematikai értelemben vett középértékét jelenti. Ha ui. az (1) kifejezésben az $F_n |v_r| = \Phi(\tau)$ jelölést használjuk, akkor az adott

$$\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$$

intervallumban a súrlódási munka

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(\tau) \Phi(\tau) d\tau.$$

Ilyen integrálokra, ha $\mu(\tau)$ és $\Phi(\tau)$ az integrációs intervallumban folytonos és $\Phi(\tau)$ állandó előjelű (ezek a feltételek fogaskerekeknél általában fennállnak), érvényes az általánosított integrálközépérték-tétel:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(\tau) \Phi(\tau) d\tau = \mu(\tau_k) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(\tau) d\tau, \quad (14)$$

ahol $\mu(\tau_k)$ a súrlódási tényezőnek a $[\tau_1; \tau_2]$ intervallumban levő valamely közbülső τ_k helyen felvett értéke.

Ha $\Phi(\tau) = 1$, akkor $\mu(\tau_k)$ éppen μ -nek a szóban forgó intervallumra kiszámított közönséges integrálközépértéke (számtani közepe), egyébként azonban semmi biztosíték sincs arra, hogy $\mu(\tau_k)$ éppen matematikai értelemben vett számtani középérték legyen. Célszerűbb az „átlagos” súrlódási tényező helyett inkább a „közepes” súrlódási tényező elnevezést használni; legyen ennek jele $\bar{\mu}$.

b) Mindaddig, amíg technikailag lehetővé nem válik a fogsúrlódási tényező időbeli változásának többé-kevésbé pontos mérése, a következő eljárás látszik célszerűnek — ha nem is olcsónak — a fogsúrlódási veszteségek előzetes számításához:

1. Készítsünk gondosan megmunkált és szerelt hajtóművet adott tengelytávra és áttételre.

2. A fogprofilok alakjának ismeretében, adott M_1 hajtó nyomaték és ω_1 szögsebesség mellett számítsuk ki az

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n |v_r| d\tau = G(M_1; \omega_1)$$

integrált. F_n -et az (5) és (4), $|v_r|$ -et a (3) és (4) képletekből fejezzük ki τ függvényeként. A $G(M_1; \omega_1)$ érték kiszámításánál így nincs figyelembe véve sem a fognyomás eloszlásának a deformációktól való függése, sem az, hogy $\varepsilon \neq 1$ esetén a kettős kapcsolódás tartományában a deformációk miatt a két fogpáron nem egyenlő arányban oszlik meg a normális irányú fogerő.

3. *Mérjük meg kísérletileg adott kenőanyagot használva a $[\tau_1; \tau_2]$ dió-tartamra eső fogsúrlódási veszteséget és a*

$$W = \mu(\tau_k)G(M_1; \omega_1) = \bar{\mu}G(M_1; \omega_1)$$

egyenletből számítsuk ki $\bar{\mu}$ értékét. Ez a $\bar{\mu}$ érték impliciten tartalmazza mindazon tényezők hatását, amelyeket G kiszámításánál nem vettünk figyelembe, hiszen W a *valóságos* hajtóművön megmért számérték.

4. Ez a $\bar{\mu}$ közepes súrlódási tényező az adott geometriai kialakítású, adott anyagokból készült hajtóműre (és csak erre) érvényes a felvett M_1 és ω_1 mellett.

5. *Ugyanazon* hajtóműnél M_1 -et és ω_1 -et változtatva a terhelés és a sebesség hatását mérhetjük meg $\bar{\mu}$ -re nézve;

6. majd hasonló mérésorozatot végezve ugyanerre, de más anyagpárosítású, más felületi finomságú fogazattal ellátott hajtóműre, más kenőanyaggal az anyagminőségnek, a súrlódó felületek érdességének és a kenőanyagnak a hatása állapítható meg $\bar{\mu}$ -re.

7. Végül az előbbi méréseket más geometriájú hajtóművekre is megismételve megkaphatjuk (táblázatos alakban) $\bar{\mu}$ -nek a legjellemzőbb paramétereiktől való függését. Ezek a $\bar{\mu}$ értékek hasonló geometriájú hajtóművek tervezésénél már elég jó közelítést biztosíthatnak a fogsúrlódási veszteség előzetes számításakor.

Ez az eljárás természetesen igen költséges és hosszadalmas; lehet, hogy nem is térül meg a befektetett munka; annyi azonban bizonyos, hogy egy adott kísérlettel meghatározott súrlódási tényező csak nagyon pontatlan eredményt ad egy teljesen más hajtómű súrlódási veszteségeinek kiszámításánál, hiszen az anyagminőség, a felületek minősége, a hajtómű geometriája, a terhelés, a fordulatszám stb. erősen befolyásolja a súrlódási tényező értékét.

IRODALOM

1. BOWDEN, F. P.—TABOR, D.: The Friction and Lubrication of Solids. Clarendon Press, Oxford 1954
2. BUCKINGHAM, E.: Analytical Mechanics of Gears. Mc Grow-Hill Book Comp., New York 1949
3. DUDLEY, D. W.: Gear Handbook. Mc Grow-Hill Book Comp., New York 1962
4. HERRMANN M.: Gépelemek (Németh József technikai Könyvkereskedése, Budapest 1924)
5. HUSZTHY L.: Súrlódási munka evolvens fogfelületeken. *Gép.* (1960), 223—230
6. HUSZTHY L.: Gear Calculation by Using Complex Expressions *Acta Techn. Hung.* 73 (1972), 363—399
7. KRACELSZKIJ, I. V.—VINOGRAĐOVA, I. E.: A súrlódási tényező. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1961
8. LECHNER, G.: Untersuchungen zur Schmierfilmbildung an Zählradern. *VDI-Z.* III, (1969)
9. Lubrication of Industrial Gears, Shell, London 1964
10. NIEMANN, G.: Schneckengetriebe mit flüssiger Reibung *VDI-Forschungsheft*, Ausg. B, Band 13., 1942
11. TEN BOSCH, M.: Gépelemek Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1957
12. THOMAS, A. K.: Die Tragfähigkeit der Zahnäder. Karl Hanser, München 1950
13. VIDÉKY E.: A súrlódás analízise fogaskerék szempontból. *MTA VI. Oszt. Közl.*, I. évf. 2
14. VÖRÖS I.: Gépelemek III. Tankönyvkiadó, Budapest 1956
15. ZABLONSKIJ, K. I.: Zsésztkoszty zubesatüh peredacs, Tehnika, Kiev 1967

Remarks on the Calculation of the Tooth Friction Losses of Gears. Numerous books and papers have dealt with the tooth friction losses of gear pairs. In the basically equivalent formulae deduced by different authors the coefficient of friction is a mean value determined by some experiment. The present paper aims at a more accurate definition of the "mean" friction coefficient and at clarifying the conditions under which the relations for tooth friction are valid.

Bemerkungen zur Berechnung der Zahnreibungsverluste von Zahnrädern. Mit den Zahnreibungsverlusten von Zahnradpaaren befassen sich zahlreiche Bücher und Aufsätze. In den von verschiedenen Autoren — für Zahnradpaare mit Evolventenverzahnung — abgeleiteten und im wesentlichen gleichwertigen Formeln ist der Reibungskoeffizient ein durch irgendeinen Versuch bestimmter Durchschnittswert. In vorliegender Arbeit versucht der Verfasser die Definition des "durchschnittlichen" Reibungskoeffizienten zu präzisieren, bzw. diejenigen Bedingungen zu klären unter welchen die Zusammenhänge für die Zahnreibungsverluste gültig sind.